積分方程式法による基礎－地盤系の動的解析

京都大学工学部　正員　　小林昭一
京都大学工学部　学生員　○梅田雄康

1．はじめに

本論文は、構造物基礎－地盤系の動的相互作用を解析するための１つのモデルとして、弾性地盤上に埋め込み部分をもつ構造物基礎が、縦波・横波より成る伝ぱ波動を受けた場合の、動的相互作用を積分方程式法により解析したものである。この解析では、２次元動弾性学の境界値問題としてモデル化した。ここで用いた積分方程式法とは、動弾性学の場の境界値問題を特異連立積分方程式に定式化し、その解を数値解析的に求める方法である。境界値問題の中には、物体力を考慮せずに解析しても満足のできる結果が得られることも多く、こういった場合に積分方程式法では、物体内の積分を必要とせず、境界上の未知数のみを問題にすればよいので、対象とする問題の次元より１次元低い次元の要素を用いることができる。積分方程式法においては、ビスコス境界要素を用いた有限要素解析などとは異なり、反射波が完全に消去される上、上に述べたように要素の低次元化も行えるので、数値解析操作も比較的簡単で、かつ高精度の解が期待できる。

2．動弾性学の基礎方程式と基本特異解

対象とする物体が、等方均質な線形弾性体であるとすれば、構成式およびひずみ－変位関係式を運動方程式に代入し、運動方程式を変位成分のみで表わせば、次の Navier－Cauchy の式を得る。

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda+\mu)\bar{u}_{j,ji} + \bar{f}_i = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{---(1)}$$

今、次の式(2)が成り立つように新しく複素量（$u_i(x)$，$f_i(x)$）を導入する。

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_i(x,t) &= Re\{u_i(x)e^{-i\omega t}\} \\ \bar{f}_i(x,t) &= Re\{f_i(x)e^{-i\omega t}\} \end{aligned}\right\} \text{---(2)} \qquad \text{ただし、} \quad \left.\begin{aligned} u_i(x) &= u_i^{(1)}(x) + i\,u_i^{(2)}(x) \\ f_i(x) &= f_i^{(1)}(x) + i\,f_i^{(2)}(x) \end{aligned}\right\} \text{---(3)}$$

式(2)を式(1)に代入し、縦波・横波の速度を C_1，C_2 として変形すれば、次式を得る。

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,ij} + C_2^2 u_{i,jj} + \omega^2 u_i = -f_i \quad \text{---(4)}$$

ここで、$\mathbb{L}_{ij}u_j = (C_1^2 - C_2^2)u_{j,ij} + C_2^2 u_{i,jj} + \omega^2 u_i$ なる演算子 $\mathbb{L}_{ij}$ を用い、さらに物体力（f_i）を無視すれば、式(4)は、次のように表わせる。

$$\mathbb{L}_{ij}\,u_j = 0 \quad \text{---(5)}$$

式(5)が、定常状態における動弾性学の基礎方程式である。ここで物理的には、点 ξ の k 方向に単位の集中力が作用した場合の、点 x の j 方向の変位を表わし、次の式(6)を満足しているような $\Gamma_j^{(k)}(x;\xi)$ を導入する。また式(6)を解いて得られる解を基本特異解といい、これは、式(7)のようになる。

$$\mathbb{L}_{ij}\Gamma_j^{(k)}(x;\xi) = -\delta(x-\xi)\,\delta_{ik} \quad \text{----(6)}$$

$$\Gamma_j^{(k)}(x;\xi) = \frac{i}{4\mu}\left[H_0^{(1)}(\xi_2 r)\,\delta_{jk} - \frac{1}{\xi_2^2}\{H_0^{(1)}(\xi_1 r) - H_0^{(1)}(\xi_2 r)\}_{,jk}\right] \text{---(7)}$$

3. 積分方程式

相反作用の定理および、$t_i(\xi)=\tilde{T}_{ij}^{(m)}u_j(\xi)$，$\tilde{\Gamma}_{ik}(x;\xi)=\tilde{T}_{ij}^{(m)}\Gamma_j^{(k)}(x;\xi)$ を用いて、積分方程式は次式のように表わせる。（ここに $\tilde{T}_{ij}^{(m)}$ は、$\tilde{T}_{ij}^{(m)}=\mu\delta_{ij}\partial/\partial n+\mu n_j\partial/\partial x_i+\lambda n_i\partial/\partial x_j$ なる演算子）

$$F(x)u_k(x)=\int_S[\Gamma_k^{(i)}(x;\xi)t_i(\xi)-u_i(\xi)\tilde{\Gamma}_{ik}(x;\xi)]dS(\xi)\ \text{---}\ (8)$$

ただし、
$$F(x)=\begin{cases}1 & ,\ x\in D\\ 1/2 & ,\ x\in S\\ 0 & ,\ x\notin D,\ x\notin S\end{cases}$$

式(8)は、一般に解析的に解くことは、困難で数値解析に頼らざるを得ない。ここで式(8)において、点 x，ξ がともに境界上の第K，L番目の要素内にある点 q_K，q_L とし、各要素内で変位および応力が一様に分布していると仮定すれば、式(8)は、式(9)のようになる。

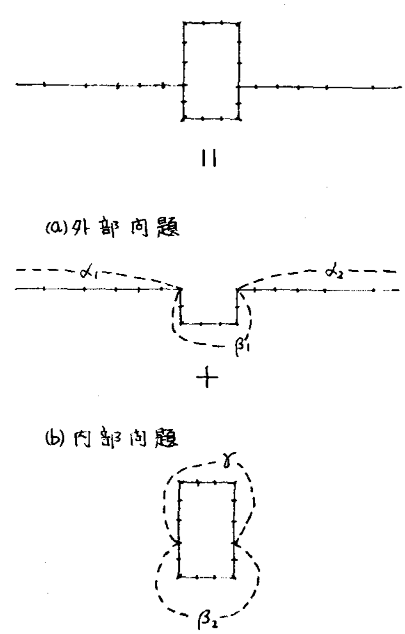
$$u_i(q_L)\sum_L\left\{\frac{1}{2}\delta_K^L\delta_{ik}+\int_S\tilde{\Gamma}_{ik}(q_K;q_L)dS\right\}=t_i(q_L)\sum_L\left\{\int_S\Gamma_k^{(i)}(q_K;q_L)dS\right\}\ \text{---}\ (9)$$

4. モデル化および定式化

地盤のみならず、構造物も線形弾性体であるとみなし、地盤および構造物は、異なった物理的性質を有するものとする。Fig.1に示すように構造物基礎－地盤系を、構造物における内部問題と、地盤における外部問題に分け、(a)(b)に示すような添字 (α,β,γ) と式(9)を適用して、内部問題・外部問題の定式化をして、マトリックス表示すれば、下記のようになる。

Fig. 1

構造物 - 地盤系



(a)外部問題（地盤）

$$[A_{\alpha_1} \vdots A_{\beta_1} \vdots A_{\alpha_2}]\begin{Bmatrix}u(\alpha_1)\\u(\beta_1)\\u(\alpha_2)\end{Bmatrix}=[B_{\alpha_1} \vdots B_{\beta_1} \vdots B_{\alpha_2}]\begin{Bmatrix}t(\alpha_1)\\t(\beta_1)\\t(\alpha_2)\end{Bmatrix}\ \text{---}\ (10)$$

ここに、
$$\left.\begin{aligned}[A]&=\left[\sum_L\left\{\frac{1}{2}\delta_K^L\delta_{ik}+\int_S\tilde{\Gamma}_{ik}(q_K;q_L)dS\right\}\right]\\ [B]&=\left[\sum_L\left\{\int_S\Gamma_k^{(i)}(q_K;q_L)dS\right\}\right]\end{aligned}\right\}\ \text{----}\ (11)$$

(b)内部問題（構造物）

$$[C_{\beta_2} \vdots C_\gamma]\begin{Bmatrix}u(\beta_2)\\u(\gamma)\end{Bmatrix}=[D_{\beta_2} \vdots D_\gamma]\begin{Bmatrix}t(\beta_2)\\t(\gamma)\end{Bmatrix}\ \text{----}\ (12)$$

ここに、
$$\left.\begin{aligned}[C]&=\left[\sum_N\left\{\frac{1}{2}\delta_M^N\delta_{ik}+\int_S\tilde{\Gamma}_{ik}(q_M;q_N)dS\right\}\right]\\ [D]&=\left[\sum_N\left\{\int_S\Gamma_k^{(i)}(q_M;q_N)dS\right\}\right]\end{aligned}\right\}\ \text{----}\ (13)$$

内部問題と外部問題の連結部分において、変位応力成分が連続的に変化し、α_1,α_2 部分において応力成分が0になるように境界条件式(14)を適用すれば、式(10)(12)は、連立することができ、式(15)のようになる。

$$\left.\begin{aligned}t(\beta_1)+t_0(\beta_1)&=-t(\beta_2)\\ u(\beta_1)+u_0(\beta_1)&=u(\beta_2)\end{aligned}\right\}\ \text{--------}\ (14)$$

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c}A_{\alpha_1}&-B_{\beta_1}&A_{\alpha_2}&A_{\beta_1}&0\\ \hdashline 0&D_{\beta_2}&0&C_{\beta_2}&C_\gamma\end{array}\right]\begin{Bmatrix}u(\alpha_1)\\t(\beta_1)\\u(\alpha_2)\\u(\beta_1)\\u(\gamma)\end{Bmatrix}=\left\{\begin{array}{l}[B_{\alpha_1}]\{t(\alpha_1)\}+[B_{\alpha_2}]\{t(\alpha_2)\}\\ [D_\gamma]\{t(\gamma)\}-[C_{\beta_2}]\{u_0(\beta_1)\}-[D_{\beta_2}]\{t_0(\beta_1)\}\end{array}\right\}\ \text{----}\ (15)$$

式(15)を解いて未知数を求めることができる。その結果を式(8)に代入すれば、任意点の変位が求められ、さらにそれより応力も求められる。