材料非線形問題における低次元化手法

京都大学工学部　正員　丹羽　義次
京都大学工学部　正員　渡辺　英一
京都大学大学院　学生員○景山　学

1. 緒論

非線形問題の数値解析においては一般に多大の演算時間と労力を必要とする。特に逆行列の多数回演算や非線形要素の作成においては顕著である。そこで次のように二段階の低次元化が考えられている。[1] その手法は第一に構造モデルの簡易要素化（ＳＥＭ）である。この方法は有限要素法では節点自由度が一般に大になるところを小自由度になるようにするもので，従来の方法に比べて剛性マトリックスの作成において演算時間の大幅な短縮化が可能である。ところで本法は自由度の減少を行なうため平面座標を x-y として面外変位を x, y についての双曲放物面で以下のように表わす。

$$w(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y \qquad (1)$$

この形状関数に伴う不整合性を補うため曲げバネ及び捩れバネを考える。つまり究極的にＦＤＭと一致するものである。第二に数学的手法を用いて更に自由度を減少する。これは一般化されたモード解析と言えるもので一種の同時逆反復法であるBatheのサブスペース法[2]を用いて元の空間から縮小された部分空間での固有値問題に変換する。この方法によるとモード解析上必要な数の固有ベクトルがすみやかに濃縮して得られる。この固有ベクトルよりなる固有関数行列を用いて問題を元の空間から縮小された空間へ線形変換する。本研究は非線形問題のうちで微小変位材料非線形問題について本手法を適用したものである。結局数百元の方程式が数元の方程式に変換される。

2. 弾塑性曲げ（微小変位）への応用

面外方向の釣合式　$[K_e^b]\{dw\} = \{dP_b\}$　(2)

このassociated Eigen V.P.　$[K_e^b]\{X\} = \lambda_b\{X\}$ の modal matrix を $[\Phi]$ $(n \times m)$ とすれば，n 次元のベクトル $\{dw\}$ を縮小された m 次元のベクトル $\{dv\}$ へ変換できる。

$$\{dw\} = [\Phi]\{dv\} \qquad (3)$$

したがって n 次元の釣合式は m 元の釣合式に変換される。

$$[\tilde{K}_v]\{dv\} = [\Phi]^T\{dP_b\} \qquad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned}[\tilde{K}_v] &= [\Phi]^T[K_e^b][\Phi] + [\Phi]^T[B_b]^T([D_p] - [D_e])[B_b][\Phi] \qquad (5)\\ &= [\tilde{K}_e^b] + [\Phi]^T[B_b]^T([D_p] - [D_e])[B_b][\Phi]\end{aligned}$$

ただしひずみ硬化率を H' として

$$[D_p] = [D_e] - \frac{[D_e]\left\{\frac{\partial f}{\partial M}\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^T[D_e]}{H' + \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)^T[D_e]\left\{\frac{\partial f}{\partial M}\right\}} \qquad (6)$$

3. 境界条件の急変する場合への定式化

2. において行なった定式化に従って塑性化進行後において境界条件の急変する構造を解析する場合には$[\bar{\Phi}]$ の用い方に充分な注意が必要である。つまり$[\bar{\Phi}]$は弾性状態でのモードであるから端点が塑性化し境界条件の急変した後のモードとは著しく異なるということから(5) 式の第二項の非線形項つまり塑性化の影響部分の効果を正しく評価できないという事に注意しなくてはいけない。そこで周辺固定の条件を単純支持構造に荷重の作用したものと境界辺にモーメントの作用したものとの合成と考えてみる。

周辺固定のままでの全体剛性マトリックスを$[K^+]$とし周辺単純支持での全体剛性マトリックスを$[K^-]$とすれば それぞれの釣合式は

$$[K^+]\{dw^+\} = \{dP^+\} \quad , \quad [K^-]\{dw^-\} = \{dP^-\} \qquad (7)$$

又,それぞれの associated Eigen V.P.の modal matrix を $[\bar{\Phi}]$, $[\Phi]$ とする。

ところで $[K^+] = [K^-] + ([K^+] - [K^-]) = [K^-] + [K^d]$ (8)

部分空間の方程式に線形変換する場合前述の欠点を補うために境界条件変化後の modal matrix に等しいと考えられる$[\Phi]$を用いる。結局式(4)に対応して

$$[\tilde{K_v}]\{dv\} = [\Phi]^T\{dP_b\} \qquad (9)$$

ここで $$[\tilde{K_v}] = [\Phi]^T[K^-][\Phi] + [\Phi]^T[K^d][\Phi] + [\Phi]^T[B_b]^T([D_p] - [D_e])[B_b][\Phi] \qquad (10)$$

(10)式第2項の意味は節点への外力モーメントである。この項は周辺単純支持の場合は不要であり、また塑性化に伴って変化する。

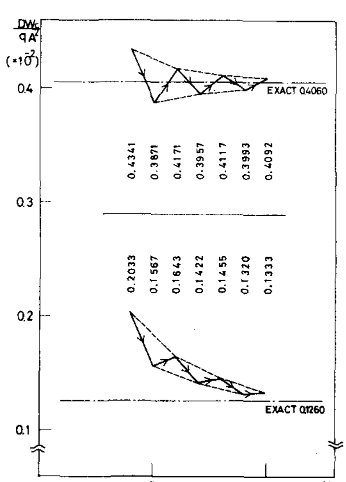
4. あとがき

実際に数値解析を行なってみると、付図のような解が得られる。正方形板の場合、第1の方法で81に第2の方法で9に自由度を縮小しても十分な精度をもった解が得られ、かつ演算時間も大幅に減少した。なお結果は当日スライドにて示す。

5 参考文献

1) 丹羽・渡辺;第32回学術講演会 I-95 1977
2) Bathe, K.J. & E.L. Wilson Numerical Methods in Finite Element Analysis Prentice-Hall, INC, 1976

図I 弾性解の収束性



図II 塑性化進行状態