

幾何学的非線形問題における低次元化について

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 渡辺英一
 京都大学大学院 学生員 ○立石 章

1. はじめに

有限変位解析には一般に多大の労力と計算時間が必要である。特に非線形剛性行列の作製、多数回の行列演算等がそうである。そこで解析の簡易化・省略に次の2段階で行い、その精度を比較検討してみた。まず第1段階として物理モデルの簡単に(S.E.M.)を行い、自由度を減少させた。第2段階として系の固有値解析より得られた固有値関数行列を用いて線形変換を行い、縮小された部分空間において非線形解析を行う。なお固有値解析には Bathe の部分空間反復法により効率的に行う。本研究では、梁・平板の弾性後座屈・有限変位解析への応用を報告する。

2. 物理モデルの簡単に

(1) 棒要素

棒要素においては変位関数として面内・面外変位共に1次関数を用い、その不整合性を補うために要素を曲げバネで連結する。(Fig.1) 曲げバネのバネ定数はF.D.M.と同様にしてFEMとする。

曲げバネ1つあたりの歪エネルギーは

$$U^p = \frac{1}{2} k (d\theta_1)^2$$

ここに

$$d\theta_1 = (w_1 - 2w_2 + w_3) / L \quad L: \text{要素長}$$

さらに要素自身の変形による歪エネルギーを考えあわせて、最小ポテンシャルエネルギーの原理より釣合方程式を得る。

(2) 板要素

板要素においては変位関数として面内・面外変位共に hyperbolic paraboloid surface を用いる。

$$f = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad f: u, v, w$$

棒要素と同様に要素をその中央で曲げバネ・捩りバネで連結する。(Fig.2) バネ定数は y , x 軸に関する曲げに対して $k_{bx} = D^2/a$, $k_{by} = D^2/b$, 捩りに対しては $k_{tp} = D/2$ とする。曲げバネ1つあたりの歪エネルギーは

$$U_x^p = \frac{1}{2} k_{bx} (d\theta_x)^2 \quad U_y^p = \frac{1}{2} k_{by} (d\theta_y)^2$$

1長方形要素の捩りによる歪エネルギーは

$$U^t = 4 \times \frac{1}{2} k_{tp} ab (d\theta_{xy})^2 \quad a, b: \text{長方形要素辺長}$$

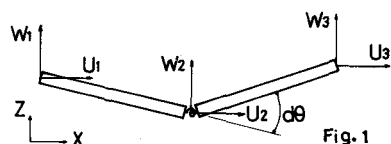


Fig. 1

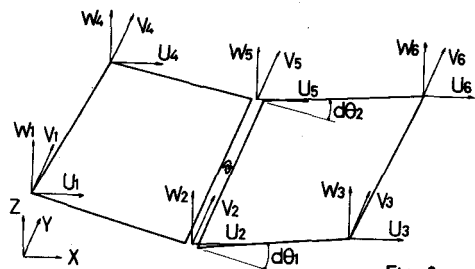


Fig. 2

ここに

$$d\theta_x = (d\theta_1 + d\theta_2)/2 = (w_1 - 2w_2 + w_3 + w_4 - 2w_5 + w_6)/2a \quad d\theta_y \text{ も同様}$$

$$d\theta_{xy} = (w_1 - w_4 + w_5 - w_2)/ab$$

棒要素と同様にして釣合方程式を得る。

(3) 低次元化の効果

S.E.M.モデルとF.E.M.のACMモデルとの比較を行う。(Table 1)なお非線形行列の要素数は対称性を考慮してある。

(4) 数値計算結果

単純支持梁に軸圧縮力・荷重の場合の弾性後座屈解析を、摂動法により数値解析した結果

を示す。(Fig. 3) 比較のためにF.E.M.のACMモデルによる計算結果及びElasticaによる厳密解を与えた。

3. 数学的低次元化

荷重増分と変位増分の間の釣合式は、

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pb} \\ K_{bp} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dP_p \\ dP_b \end{Bmatrix}$$

面内変位を面外変位により表現して、

$$\{du\} = [K_{pp}]\{dP_p\} - [K_{pp}][K_{pb}]\{dw\}$$

$$([K_{bb}] - [K_{bp}][K_{pp}][K_{pb}])\{dw\} = \{dP_b\} - [K_{bp}][K_{pp}]\{dP_p\}$$

ここで線形座標変換

$$\{dw\} = [\Phi]\{dv\}$$

を行い、両辺に $[\Phi]^T$ をかけて

$$\begin{aligned} & ([\Phi]^T[K_{bb}][\Phi] - [\Phi]^T[K_{bp}][K_{pp}][K_{pb}][\Phi])\{dv\} \\ & = [\Phi]^T\{dP_b\} - [\Phi]^T[K_{bp}][K_{pp}]\{dP_p\} \end{aligned}$$

ここに $[\Phi]$ の固有モードの個数へ低次元化された。

この手法で問題となるのは、線形解析において得られた $[\Phi]$ を非線形解析へ適用する点である。大変形問題においては境界条件が変化しないことから、固有モードにも大幅な変化はない。従って $[\Phi]$ としては線形解析によるもので十分な精度を持つ解が得られると考えられる。一方非線形項による固有モードへの影響を無視できなくなる程変形が大きくなった段階で、再度固有値解析を行うことも考えられる。

なお固有モードの個数と解の精度の関係等の数値計算結果は当日スライドで示す。

		棒		板	
		F.E.M.	S.E.M.	F.E.M.	S.E.M.
1節点の自由度		3	2	5	3
非線形行列要素の数	K_{rij}^{PB}	20	6	312	80
	K_{ijpq}^{BB}	35	5	1365	35

Table 1

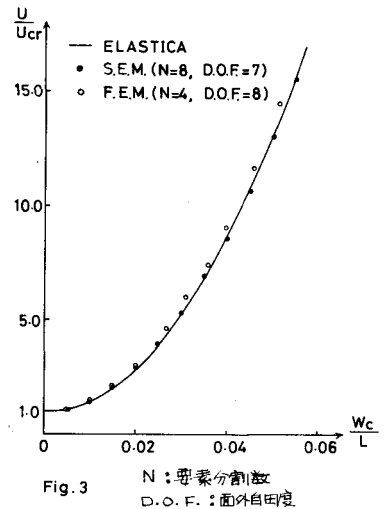


Fig. 3

N : 要素分割数
D.O.F. : 面外自由度

4. 参考文献

1) 丹羽・渡辺；第32回学術講演会 E-95 1977