構造解析における線形化手法について

京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　渡辺英一
京都大学大学院　学生員○和泉有祐

1．はじめに

非線形問題は普通．材料非線形と幾何学的非線形の2つに大別できる。本論文では幾何学的非線形問題を対象とし．ＦＥＭモデルを適用し各線形化手法の誤差の評価を行なう。幾何学的非線形問題は．ひずみが変位の非線形式として表現される。従って．つり合い式も一般化変位の非線形式で表わされるので．数値解析を行なう際，線形化手法を適用せねばならない。線形化手法として．増分法，自己修正型増分法，摂動法，Newton-Raphson法などが挙げられるが．これらの適用は要求される精度と経済性によって決定されねばならない。一般に．誤差を小さくするには．Newton-Raphson法のように．解が収束するまで反復計算を行なわねばならず．非常に手間がかかる。また．増分法のように．手間を省いた手法を用いれば．誤差が蓄積する。本論文では．多自由度系の幾何学的非線形問題を数値解析すると共に．誤差の評価の方法を提案し．各線形化手法の比較をする。

2．定式化

幾何学的非線形問題にＦＥＭモデルを適用し．最小Potential energyの原理より．つり合い方程式が次式のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_j^E \\ W_j^E \end{Bmatrix} \quad \text{------}(1)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] = [K^0] + \frac{1}{2}[K^{\mathrm{I}}] + \frac{1}{3}[K^{\mathrm{II}}]$$

$$[K^0] = \left[\begin{array}{c|c} K^{P}_{ij} & K^{PB}_{ijk} W_k^{I} \\ \hline K^{PB}_{jik} W_k^{I} & K^{B}_{ij} + K^{BB}_{ijkl} W_k^{I} W_l^{I} \end{array}\right]$$

$$[K^{\mathrm{I}}] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & K^{PB}_{ijk} W_k^{E} \\ \hline K^{PB}_{jik} W_k^{E} & K^{PB}_{kij} U_k^{E} + 3K^{BB}_{ijkl} W_k^{I} W_l^{E} \end{array}\right]$$

$$[K^{\mathrm{II}}] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2} K^{BB}_{ijkl} W_k^{E} W_l^{E} \end{array}\right]$$

ただし、U_j，W_jは面内，面外変位を．添字E，Iは弾性，初期変位を，P_i，Q_iは面内，面外荷重をそれぞれ表わしている。

不つり合い力を次式で定義する。また．構造モデル全体の自由度をN，面内，面外要素の自由度をN_1，N_2とする。

$$\begin{Bmatrix} f_{ui} \\ f_{wi} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_j^E \\ W_j^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} \quad \text{--------}(2)$$

(1)式で増分形をとると．(3)式になる．ただし．添字0は現在ステップの値であることを示している．

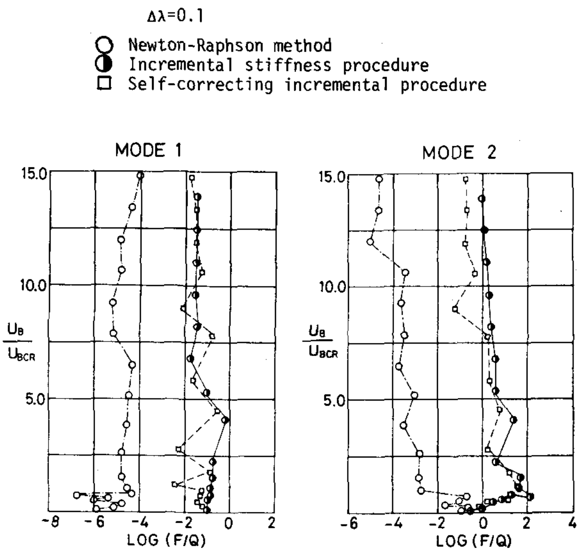
$$\begin{Bmatrix} dP_i \\ dQ_i \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{K}_{110} & \bar{K}_{120} \\ \hline \bar{K}_{210} & \bar{K}_{220} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} dU_j \\ dW_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{ui0} \\ f_{wi0} \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(3)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{K}_{110} & \bar{K}_{120} \\ \hline \bar{K}_{210} & \bar{K}_{220} \end{array}\right] = [K_0^0] + [K_0^{\mathrm{I}}] + [K_0^{\mathrm{II}}]$$

FEMモデルでは，N個の一般化変位とN個の一般化荷重を持つが，幾何学的非線形問題においては一般化荷重は次のような荷重パラメータλと荷重モード$(P_i^0, Q_i^0)^T$で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} P_i^0 \\ Q_i^0 \end{Bmatrix}$$

従って荷重増分は$d\lambda$で表わすことができる。(3)式に対して直接線形化手法を適用し数値解析すると，一般化変位に関して非線形である[K]マトリックスの逆行列演算が必要となるが，[K]はN×Nであり，多大の演算時間を要する。また，この場合の誤差は(2)式で定義される不つり合い力と考えられるが，$(f_{ui}, f_{wi})^T$は，N元のベクトルであり，自由度ごとに誤差を比較することは実際的ではない。本論文では，自由度の低次元化をはかり，各線形化手法の誤差の評価を行なう。



3．線形化手法の誤差の評価

(3)式を面内と面外要素に分けると，

$$\{dP_i\} = [\bar K_{110}]\{dU_j\} + [\bar K_{120}]\{dW_j\} + \{f_{ui0}\}$$

$$\{dQ_i\} = [\bar K_{210}]\{dU_j\} + [\bar K_{220}]\{dW_j\} + \{f_{wi0}\}$$

上の2式より$\{dU_j\}$を消去すると

$$\{dQ_i - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1} dP_i\} = [\bar K_{220} - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1}\bar K_{120}]\{dW_j\} + \{f_{wi} - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1} f_{ui0}\}$$

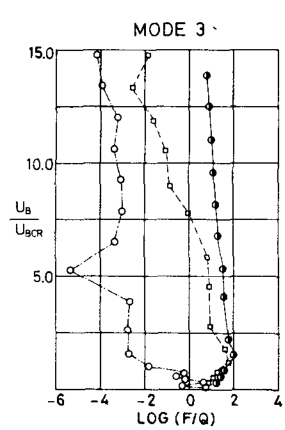
上式において，自由度はNから$N/2$に減ったことになる。さらに，$\{W_j\}=[\Phi]\{V_m\}$なる$n \times m$の変換マトリックス$[\Phi]$を導入すると，$\{dW_j\}=[\Phi]\{dV_m\}$より，上式は次式になる。

$$[\Phi]^T\{dQ_i - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1} dP_i\} = [\Phi]^T[\bar K_{220} - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1}\bar K_{120}][\Phi]\{dV_m\} + [\Phi]^T\{f_{wi0} - \bar K_{210}\bar K_{110}^{-1} f_{ui0}\}$$

これを　$\{d\tilde P_v\} = [\tilde K_{v0}]\{dV_m\} + \{\tilde f_v\}$

と表わす。従って$[\Phi]$の導入により$N/2$元のベクトル$\{dW_j\}$から，m元のベクトル$\{dV_m\}$に変換されたことになる。$[\Phi]$の要素として構造モデルに対して適当な固有値問題を解き，固有値の小さい順にm個の固有モードを採用する。

よって，$m=3$とすると，$[\tilde K_{v0}]$は3×3となり容易に逆行列演算を行なうことができる。また，$\{\tilde f_v\}$は各固有モードに対応する誤差であり，これを各線形化手法の誤差とすれば有効である。



4．数値解析例

安定対称座屈モデルであるハリの軸圧縮問題をとりあげ，$[\Phi]$は，座屈に関する1，3，5次の固有モードとし，それをMODE1,2,3とした。詳しい結果は当日スライドで示す。

参考文献／ 丹羽・渡辺　弾塑性・有限変位解析におけるサブスペース法の応用について．昭和52年 土木学会第32回年次学術講演会講演概要集 I-95