マトリクス構造解析におよぼす構造物の位相特性の影響

京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　○谷口健男

1．まえがき　マトリクス構造解析法への構造系の位相幾何学的特性の導入は今日までに，例えば構造解析のネットワークアナロジー，応力法における静定基本系の選択法，数値解析．特に連立一次方程式の係数行列内非零要素配列法等においてみられる。上記第3のテーマは純粋にグラフの問題であり，電算機用アルゴリズム的には組み合わせ問題となり，係数行列内非零要素最適配列法の設計は非常に困難なものとなる。本研究では，特にスパース マトリクス法のための最適消去順序決定法のための Fill-in 最小問題を取り扱い，最小化過程で必要とされる条件を指摘し，更に帯幅・プロファイル最小化問題にもふれる。

2．最小フィル・イン問題　連立一次方程式の係数行列（正定値・対称），あるいはその系より得られる1つの連結グラフを $G(n,m)$ とする。n，m は点及び線数とする。以下 D. J. Rose の研究に従い Gaussian Elimination を Vertex Elimination と考える。[1)] n 点のうち任意の i 個の点が消去され，次に $(i+1)$ 番目の点 v_{i+1} の消去を考えると，v_{i+1} の消去により下式のように1つの subgraph (G_s) が完全グラフ化する。

$$G_s\{v \mid d(v_{i+1}, v)=1\} \longrightarrow G_s^c\{v\} \quad , \quad G_s^c : \text{complete subgraph} \tag{1}$$

vertex elimination による位相構造の変化は (1)式を満たす G_s のみに限られ，このような G_s の個数 $|G_s|$ は，消去された点の接続関係によって定まり，一般に下式を満たす。

$$1 \leq |G_s| \leq i \leq \chi \qquad \chi : G\text{固有の値} \tag{2}$$

独立な1つの G_s を FVG (Frontal Vertex Group) と呼ぶことにする。ある消去過程において下式で示す v_k が必ず発生する。

$$v_k \in FVG_1 \cap FVG_2 \cap \cdots \cap FVG_e \quad , \quad 2 \leq e \leq \deg . v_k \tag{3}$$

このような v_k の消去により (3)式で示される全ての FVG's は合併し，1つの FVG となる。

$$FVG\{v \mid v \in \bigcup_{j=1}^{e} FVG_j ,\ v \neq v_k\} \tag{4}$$

(4)式で示すような FVG の合併という現象は，消去過程のある段階まではさけることが可能であるが，少くとも消去において複数個の FVG's が発生した場合においては，さけようがなく，FVG の合併が見られ，最終的には1個の FVG のみが残ることになる。

通常の構造解析の対象となる系のグラフ G においては，1つの vertex の次数 deg. には必ず上限が存在する。すなわち，

$$\deg . v \leq K \quad , \quad K : \text{const.} \tag{5}$$

さらに，1つの FVG に含まれ，かつ元の G にも含まれていた線数を l とすれば，

$$\sum_{k=1}^{n'} \deg . v_k = 2l \quad , \quad n' : \text{FVG内の点数} \tag{6}$$

(5), (6)式より下式が導かれる。

$$l \propto n' \tag{7}$$

(7)式は"G の任意の連結 subgraph に含まれる線数はその subgraph 内の点数に比例する"ことを示す。更に，この subgraph を FVG と考えると，それは1つの完全サブグラフとなり，含まれる線数は $n'(n'-1)/2$ と求まる。この考察より以下の重要な[理論]を得る。

[理論] 1つのFVG内に発生する付加的な線(fill-in)の数は、そのFVG内の点数の二乗に比例する。

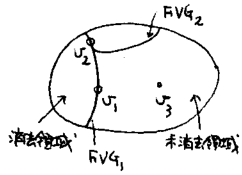
$$\text{fill-in for FVG} \propto |FVG|^2 = (m')^2 \qquad (8)$$

この理論は、fill-in最小化においては、FVGに含まれる節点数を最小化することが重要な要因であることを示している。今簡単のために右図のような外周辺が全体として凸であるようなGを考える。点密度は一様とし、近傍の点間には線分が必ず配置されているものとする。任意の消去段階において、次に消去される点として v_1, v_2, v_3 の3ケースが考えられよう。それぞれの場合の付加線数 Δl は、

$$\Delta l \text{ of } v_1 \propto \alpha \cdot |FVG_1|, \quad \alpha: \text{const.} \qquad (9)$$

$$\Delta l \text{ of } v_2 \propto |FVG|_1 \cdot |FVG|_2 + \beta(|FVG|_1 + |FVG|_2), \quad \beta: \text{const.} \qquad (10)$$

$$\Delta l \text{ of } v_3 \leq \gamma = \text{const.} \qquad (11)$$



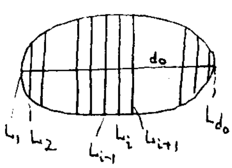
図−1

α, β, γ は全て系内の点のdeg.に関する値であり定数と考えられる。

(9), (10), (11)式を比較すると、一般には次の関係が成立する。

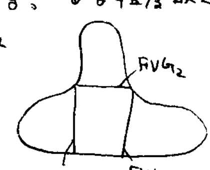
$$\Delta l \text{ of } v_2 > \Delta l \text{ of } v_1 > \Delta l \text{ of } v_3 \qquad (12)$$

(12)式によれば、(11)式を満たすvertexの消去が最もFill-inの発生を抑えることになるが、このような消去が可能であるのは(2)式よりある限界があることを知り、以後のeliminationにおいては、(4)式のFVGの合併現象が生じ、その時には、(10)式の形で評価されるFill-inの発生を生じる。更に、その時には[理論]及び(8)式での非常に多くのFill-inの発生を見ることになり、(11)式の形でFill-in最小化が行いうるとは云えない。つぎに(9),(10)両式を考えてみる。図−1のようなGの場合、(10)式のようなvertexの消去はなくまでさけるべきであろうと云える。すなわち、このような消去により、$FVG_1 \cup FVG_2$ の合併した大きなFVGが発生し、その段階で多くのFill-inが発生するとともに少くとも $\{v \mid d(v, \forall v' \in FVG_1 \cup FVG_2) = 1\}$ の消去に悪影響を及ぼすことはもちろん、更に離れたvertexに対して影響が及ぶ。一方(9)式は、Fill-inの発生はFVGの大きさのみに関連することを示し、新たに発生するFVGの大きさの増加にのみ十分注意すれば良いことを示している。(9)式のみを用いるとすれば、図−2に示すように新たな点のみを含むFVGの列 $\{L_1, L_2, \cdots, L_i, \cdots, L_{d_0}\}$ というグラフの直径 d_0 をクロスするように、かつ|FVG|の増分を最小にするようなElimination Processが好ましいことがわかり、図−1のような FVG_2 の発生はさけるべきであることがわかる。ある程度以上の大きさを持つ複数個のFVG'sの発生は、よって図−3のようなGにおいてのみFill-in減少に役立つと考えられよう。



図−2

3. あとがき. 本論文は最小フィルイン問題に関し、FVGというものを尺度としてその最小化諸要因を探ったが、その過程で得られた結果は、帯幅およびプロファイル最小化問題の重要な手がかりとなる。すなわち、FVG列の最大値 $|FVG|_i$ は帯幅を規定し、更に、$FVG_i \cap FVG_j \neq \phi$ を満たす複数個のFVG'sの発生が任意の消去過程でみられるならば、各FVGを最小化すればよく、それはプロファイルに関係する。



図−3

[参考文献] 1). D. J. Rose, Graph Theory and Computing (Ed. R. C. Read), Academic Press, 1972, pp. 183−217