バンドマトリクス法における最小入力データ構成アルゴリズムの提案

京都大学工学部　正　員　白石成人
京都大学工学部　正　員　谷口健男
京都大学大学院　学生員○殿本　卓

1）まえがき　マトリクス構造解析において、連立一次方程式の解法は重要な地位を占め数多くの有効な手法が提案されているが、それらはすべて係数行列の特徴、すなわち対称，正定値及び疎であるということを利用するものである。それらの一つに帯行列法が上げられ、この方法を最も有効に利用するには帯幅の最小化を図る必要があるが、たとえ最小化を行なったとしてもその帯行列内には数多くの零要素が含まれる。このような不必要な零要素を除くために今一度数値解析の立場より帯行列法を見れば、この帯行列が行単位に消去され、よって各列の最初の非零要素と対角との間にはさまれる領域のみが数値解析上必要なデータ領域（プロファイルと呼ぶ）と言え、明らかに必要な領域は少なくてすむ。この考えに基づくのがプロファイル法と言われる本質的には帯行列法に一致する一つの数値解法である。本研究の主たる目的はこのプロファイル法を有効に用いる為のプロファイル減少アルゴリズムの提案にある。

2）構造係数行列の最小プロファイル　Tree系におけるプロファイル最適節点番号付け手法というものは、すでに提案されている[1]。それよりの類推から一般形状は、数種類のものに分類できるように思われる。突起・穴あきのない形状を凸形状，他を凹凸形状と呼ぶことにする。Tree系において集中点で切断することによりプロファイル減少を計ったように、凹凸形状においても集中部で切断することによりプロファイルが減ることが経験的にわかっている[2]。よって凹凸形状に対しては、分割を施して凸形状の集合にした後各凸形状に、別に探究した凸形状におけるプロファイル減少手法を適用することによりプロファイル減少を計ることにする。さて、凸形状に対するプロファイル減少手法の具備すべき条件は次の2つに大別できる。

a)全体的に見た場合の条件

b)局所的に見た場合の条件

a)に対するものとして以下の2つがある。

1.始めに番号を付ける点（出発点）は直径の一端である。ここで直径とはグラフにおける2節点間の最長パスのことを言う。

2.出発点よりの等距離集合（L_i；iは出発点よりの距離）ごとに番号付けを施す。

この2つは帯幅における直径の重要性及びプロファイルが$\sum_i l_i^2$（L_iの要素数をl_iと書く）に比例することより導かれる。

b)に属するものとして以下の2つがある。

1. L_iの点集合における番号付けは、L_{i-1}の *out-degree* の小さいものに隣接するL_iの点からうっていく。

2. out-degree最小のものがいくつかある場合には、その中でin-degree最大のものから番号をうっていく。

この2つは帯幅最小化に対するChengの方法よりヒントを得て考案したものである。[3]

3）プロファイル減少法の提案　　まず凸形状（n点系）に対するプロファイル減少アルゴリズムより書く。但しグラフの長手方向は、はっきりしていると仮定する。

（Step 1）直径の両端の点でout-degree最小の点を出発点として番号nを付ける。

（Step 2）L_iの点に番号を付ける場合は、L_{i-1}のout-degreeの小さいものに隣接するL_iの点からうつ，なお番号は大きいものから小さいものへと逆にうつ。

（Step 3）out-degree最小のものがいくつかある場合は、その中でin-degree最大のものにまず番号をうつ。

（Step 4）番号をうった節点のin-degreeを消す。

（Step 5）2，3，4の操作を続けてすべての節点に番号をうつ。

ここで節点番号を逆にうつのは、プロファイルの大小が隣接する点の最小番号と深いかかわりがあり、それを考慮しているためである。

さて次に凹凸形状（穴あき形状及び突起に突起がついたような形状を除く）におけるプロファイル減少アルゴリズムを述べる。ここで用いるbreaking point（B.P.）とは、直径の一端よりL_iを構成していった際、L_iの中の境界点の数が初めて3以上になるL_iに属し、L_{i-1}から距離1にない境界点のことである。

（Step 1）直径の一端の点から始めてB.P.を探す。

（Step 2）直径の一端から境界線上をたどり、もう一方の直径の端へ行くとき、一方を＋のpath，もう一方を－のpathとする。

（Step 3）B.P.が＋にあれば－に、－にあれば＋に向かってB.P.を出発点とするShortest Pathを見い出す。各B.P.のShortest Pathの短いものを切断線とする。

（Step 4）切断線上にあるB.P.を出発点として、以上の1，2，3の操作を続けて凹凸形状を凸形状の集合としてしまう。

（Step 5）それぞれの凸形状に対しては、凸形状の節点番号付けアルゴリズムを用いる。

以上のアルゴリズムを一般の突起を持つ形状に拡張することは容易である。

4）あとがき　　帯行列法は、ここでいう凸形状に対して他の手法よりすぐれているが、凹凸形状ではバンド状に係数マトリクスを作ることは難かしく、特に大規模な問題ではバンド幅を小さくするような番号付けは困難である。このような凹凸形状に対して変動帯行列法は、その利点を発揮してくる。さらに帯行列法と変動帯行列法は、入力データ作成が異なるだけで数値計算のプログラムは同一である。このようなことより構造物の系の特性に応じて両手法を使いわけることにより、構造解析をより合理化することが可能となろう。なお詳しいアルゴリズム及び適用例題に関しては当日発表する。

参考文献
(1) 白石,谷口「構造解析のための節点番号付け最適化手法について」電算機利用に関するシンポジウム講演概要 PP5-8 1976.11.
(2) 白石,谷口「帯幅最小化問題に関する基礎的研究」電算機利用に関するシンポジウム講演概要 PP57-60 1977.1
(3) K.Y.Cheng「Minimizing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices」Computing 11 PP103-110 1973