

3 裂伝播の一数值解法

京都大学大学院 学生員 ○吉田幸司
京都大学工学部 正 員 小林昭一

1. はじめに

最近、積分方程式による解法が注目を浴びようになり、種々の問題にその適用がけられている。積分方程式解法は境界条件を満足するように、場の方程式を境界上で積分するだけであるので、き裂伝播のように境界が移動するような問題でも、成長したき裂の部分の境界を逐次付け加えるだけの手間を追跡しながら解析して行くことが出来ると思われる。

本研究は、このような積分方程式の特性に注目して種々な応力場にある初期クラックから発生する二次き裂の伝播を、積分方程式解法により解析したものである。

2. 積分方程式

弾性問題における外部力2種境界値問題の積分方程式は、1重層ポテンシャルを導入することにより次のように定式化される。

$$u_i(x) = \int_S \Gamma_{ij}^{(0)}(x; y) q_{kj}(y) dS_j \quad x \in D, y \in S \quad (1), \quad \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n_j} \right\}_e = t_i(x) \quad x, y \in S \quad (2)$$

$$t_i(x) = -\frac{1}{2} q_i(x) + \int_S \Gamma_{ij}^{(0)}(x; y) q_{kj}(y) dS_j \quad x, y \in S \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_j} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (4)$$

ここに、 $u_i(x)$ は x における変位、 $t_i(x)$ は境界上の表面力、 $q_{kj}(y)$ は1重層ポテンシャル、そして $\Gamma_{ij}^{(0)}(x; y)$ は基本特異解を示し、 $\Gamma_{ij}^{(k)}(x; y)$ は $\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \Gamma_{ij}^{(0)}(x; y)$ である。

今回使用したプログラムは、境界を円弧で近似し、また密度の分布は2次関数で近似し、さらに1区間内に40点をとるガウス積分を行なっている。このプログラムを無限板に円孔が存在するという簡単な問題へ適用した結果を示すと表-1、表-2のようになる。ただし、平面ひずみ状態における応力及び変位である。これから、このプログラムは相当精度が良いことがわかる。

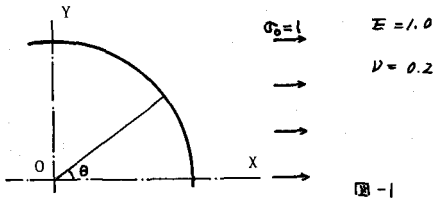


図-1

3. き裂伝播への適用

き裂の発生機構や進行方向について、種々の理論が提唱されているが、本数值解法ではそれらについて、次の2つの仮定を設けた。

- i) き裂は引張応力によって発生するものとし、その引張応力の大きさがある基準

θ	N = 18	N = 36	Analytical
0°	-0.912	-1.000	-1.000
30°	0.024	0.003	0.000
45°		1.073	1.000
60°	2.135	1.994	2.000
90°	2.994	2.993	3.000

表-1

θ	N = 18	N = 36	Analytical
0° (x)	2.875	2.879	2.880
0° (y)	0.000	0.000	0.000
30° (x)	2.496	2.492	2.494
30° (y)	-0.479	-0.478	-0.480
45° (x)		2.033	2.036
45° (y)		-0.678	-0.679
60° (x)	1.437	1.438	1.440
60° (y)	-0.833	-0.830	-0.831
90° (x)	0.000	0.000	0.000
90° (y)	-0.962	-0.960	-0.960

表-2

値 α を越えたとときに発生するものとする。

ii) 亀裂の進行方向は引張り応力方向と直角とする。

このような仮定に基づき、亀裂伝播の追跡を行なうために次のような手段をとった。亀裂先端周辺に数個の点(以後搜索点と呼ぶ)における引張り応力を求め、その中で最大引張り応力を持つ点の値が基準値 α を越えたととき、その搜索点の方向へある長さ δ だけ亀裂が進行するとした。これをフローチャートに示すと図-2となる。

亀裂のような問題を積分方程式で解く場合、問題となるのはその先端の形状の処理方法である。亀裂先端の曲率半径を ρ とした場合、実際には $\rho \neq 0$ であらうが、 $\rho = 0$ とすると積分方程式解法では解を得ることが困難であるので、ある曲率半径 ρ をもたせざるを得ない。

今回のシミュレーションにおいては、亀裂の形状を次のように決めた。亀裂の先端近くまではタブレットとし、その先端に半径 ρ の円を付加することにより先端を処理した。亀裂を進行させる場合には円を除いてタブレットを継ぎだし、その先端に円を付加するものとした。(図-3)

この方法で問題となるのは1回の操作で進める大きさを δ と、亀裂の先端に加える円の半径 ρ 、さらに基準値 α というものをどのようにして決定するかということである。

4. シミュレーション・モデル

シミュレーションに使用したモデルの一例として、一様引張り応力場と円孔が存在し、それより亀裂が伝播する場合をあげてみる。この場には、初期に応力集中が起こる点がわかっているので、A点近くの分割を細かくした。(図-4)また、亀裂が発生するのもA点からということがわかっているので搜索点もその周囲に配置をした。

この場合の例では、試験的に円孔の半径を a とすると、 $\delta = a/10$, $\rho = a/100$, 搜索点と亀裂先端の境界との距離を $a/1000$ とした。結果を図-5に示すが、今回は5-stepで計算を止めた。

亀裂の進行方向が逐次変化する場合の計算結果については、当日学会で発表する。

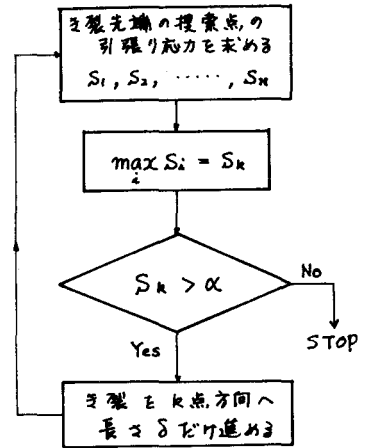


図-2 フローチャート

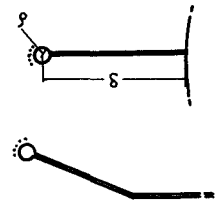


図-3

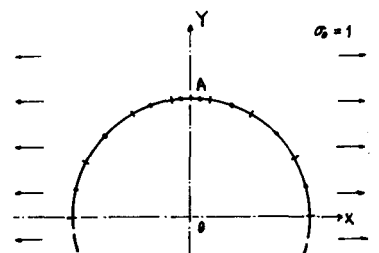


図-4

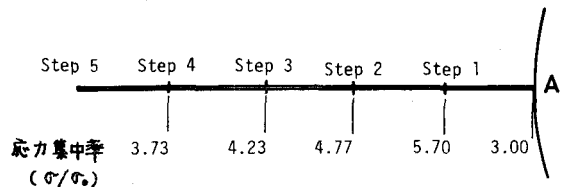


図-5