対応原理を応用した三次元粘弾性解析

京都大学工学部　正員　丹羽義次
福井大学工学部　正員　福井卓雄
神戸市　正員○中島信

1．はじめに

近年の交通網開発においては、種々の制約条件から、路線の多くの部分がトンネルとして建設されるケースが目立つようであり、この傾向は、いきおい地質の良くない地盤中にもトンネルを通す結果となり、施工上数々の困難を伴なっているのが現状である。

これらの問題への対策を講じるためにも、力学的特性、とりわけ、トンネルの切羽周辺の三次元的な経時的変位，応力を的確に把握することが必須となってきた。

そこで本研究は、対応原理を応用した、いわゆる数値ラプラス逆変換により、線形弾性体に対する，積分方程式の純三次元的な解析プログラムから，トンネル切羽周辺の変位、応力状態の解析解を得ることを試みた。

なお、逆変換には，計算の簡略化，経済性を考慮し、線形粘弾性体のモデル化を変化させた場合にも、その取り扱いが簡単となる手法を考案した。

2．問題の定式化

等方均質な線形粘弾性体に対する変位で表現した支配方程式は，

$$\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{t}[\lambda(t-\tau)+\mu(t-\tau)]\frac{\partial u_{j,ji}(\tau)}{\partial\tau}d\tau+F_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

初期条件及び境界条件は，

$$u_i(t)=0,\quad e_{ij}(t)=e_{ij}^{(0)},\quad \sigma_{ij}(t)=\sigma_{ij}^{(0)}\qquad(-\infty<t<0)$$

$$T_i(t)=\sigma_{ij}(t)\cdot n_j=S_i(t)\quad \text{on } B_\sigma\qquad u_i(t)=\Delta_i(t)\quad \text{on } B_u$$

一般に、関数 $f(t)$ のラプラス変換を、 $f^*(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ ，のように表わし、上の支配方程式及び境界条件を，時刻 t についてラプラス変換すれば，

$$\frac{\mu^*(s)}{\rho}u^*_{i,jj}(x,s)+\frac{\lambda^*(s)+\mu^*(s)}{\rho}u^*_{j,ji}(x,s)-s^2u_i^*(x,s)=-\frac{1}{\rho}F_i^*(x,s)$$

$$T^*(s)=\sigma_{ij}^*(s)n_j=S_i^*(s)\quad \text{on } B_\sigma\qquad u_i^*(s)=\Delta_i^*(s)\quad \text{on } B_u$$

特に、負荷がその慣性力を無視できるほどゆるやかであるとする準静的問題では，

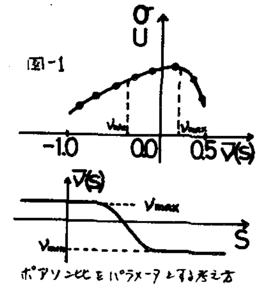
$$\frac{\mu^*(s)}{\rho}u^*_{i,jj}(x,s)+\frac{\lambda^*(s)+\mu^*(s)}{\rho}u^*_{j,ji}(x,s)=-\frac{1}{\rho}F_i^*(x,s)$$

のようになり、これは静的な線形弾性体に対する問題と等価な式となる。

静的な線形弾性体の問題を積分方程式に帰着させる手順，並びに三次元的な数値解析上の，対称面を有する問題の取り扱いの詳細については，（土木学会論文報告集第266号（1977.10））を，参照されたい。

3．数値ラプラス逆変換の手法

上記の積分方程式を解くことによって、いわゆる像空間での変位、応力が求まる。これを、各種の変換パラメータ S について、適当な回数だけ繰り返し、得られたデータをもとに現空間での解を得るのが、一般的な数値ラプラス逆変換の過程である。　ここでは、ポアソン比をパラメータとして取り扱い、関数補間を導入し、モデル化における定数の変化によっても、比較的簡単に逆変換が可能な手法を採用した。



ポアソン比をパラメータとする考え方

すなわち、線形粘弾性体のせん断変形，体積変化を表わすモデルにおける，応力-ひずみ関係の微分方程式は，D を $Df=\frac{\partial f(t)}{\partial t}$，で定義された時間導関数の演算子とすれば，

$$P_1(D)\sigma_{ij}' = Q_1(D)e_{ij}' \quad , \quad P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)e_{kk}$$

のように示される。　このとき，対応するヤング係数，ポアソン比は，$\bar{E}(S)=\dfrac{3Q_1(S)Q_2(S)}{Q_1(S)P_2(S)+2P_2(S)Q_2(S)}$，$\bar{\nu}(S)=\dfrac{P_1(S)Q_2(S)-Q_1(S)P_2(S)}{Q_1(S)P_2(S)+2\cdot P_1(S)Q_2(S)}$

から計算される。　従って，これらの関係より，モデルが決定されれば，変換パラメータ S に対する $\bar{E}(S)$，$\bar{\nu}(S)$ の変域が決まり，特に像空間での変位，応力に本質的な $\bar{\nu}(S)$，について，これを関数補間によって，先の計算値より得て，像空間での値とする。　この，数値データをもとに，現空間での近似関数，$f(t) = A + \sum_i C_i \exp(-b_i t)$ の未定係数，A，C_i を求めようとするのが，ここでの逆変換の手法である。（図1参照）

4．解析の一例

一例として，一様な応力状態にある，いわゆる三要素モデルで表現されるような，線形粘弾性地山中に，瞬間的にトンネルを開削した場合の経時的な変位，応力の解析結果を以下に示す。　図-2は，地山がトンネル軸に対して垂直な直応力を受けている場合の　次元的な変位の様子であり，図-3に示す断面上での変位，応力の時間的変化が，図-4，図-5である。　ここでのモデルは，（$2G=1.0$，$2G^*=0.05$，$\eta_G=0.5$，$3K=0.1$，$3K^*=0.1$，$\eta_K=0.5$）なる，せん断変形，体積変化，ともに，フォークトモデル的な挙動をするものである。　しかしながら，一般に経時的な変化が少ないモデル化では，精度良い逆変換を行なうには困難を伴なうようである。

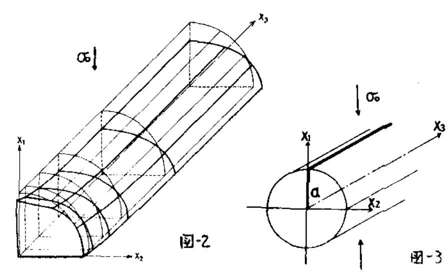


図-2　　図-3

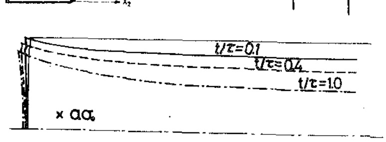


図-4

5．おわりに

本研究のように，ポアソン比をパラメータとして取り扱う手法によって，モデル化の変化に対しても，いちいち繰り返し計算をせずに逆変換が可能であることがわかった。　現在，そのより広い汎用性について検討中であり，詳細については当日とりまとめて発表の予定である。

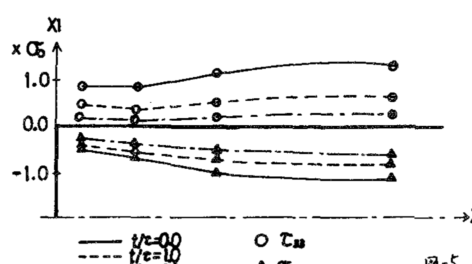


図-5