内部に集中力を受ける1/8無限等方弾性体の解析解

大阪工業大学　正員　岡村宏一
東洋技研コンサルタント(株)　正員　○島田　功

1. まえがき； 本文は、特異性を持つ解を応用し、内部に集中力を受ける1/8無限等方弾性体問題の解析解を報告したものである。物体力問題に対しては、古くは無限体領域の1点に集中力が作用するときのKelvinの解、半無限体領域の1点に集中力が作用する場合のMindlinの解があり、素解として多くの3次元問題の解析に応用されている。ところで種々な境界を持つ素解の開発は、数値解析上境界処理を容易にし、精度を向上するなど、有用であると考えられる。本報告では、その境界表面が(a)自由、および(b)固定の場合について一般解法を示し、他の特殊な境界条件の場合についても示した。

2. 基礎式、および基本解； 均質な等方弾性体の釣合式を変位(u, v, w)で表わせば次式となる。

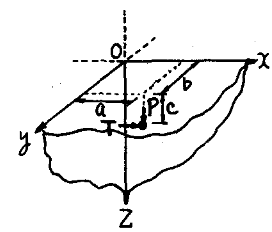

図-1 1/8無限体

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u=0,\quad (\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v=0,\quad (\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w=0 \qquad \text{------}(1)$$

ただし

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ν；ポアソン比

式(1)を書きかえると

$$\nabla^2\xi_1=0,\quad \nabla^2\xi_2=-\frac{\lambda+G}{G}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_1,\quad \nabla^2\xi_3=0 \qquad \text{------}(2)$$

ただし

$$\xi_1=e,\quad \xi_2=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \xi_3=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

式(2)は、(u, v, w)、(x, y, z)をサイクリックに変えることにより、後2組の基礎式を得るが注)省略する。式(2)の基礎式を用いる場合の微分方程式の解、および変位成分は次のようになる。

$$\xi_1=\frac{A}{r},\quad \xi_2=\frac{B}{r}-\frac{\lambda+G}{2G}A\frac{\partial^2 r}{\partial z^2},\quad \xi_3=\frac{C}{r} \qquad \text{------}(3)$$

ただし

A, B, C；積分定数、　$r^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{G}\iint\left\{(\lambda+2G)\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-G\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+G\frac{\partial\xi_3}{\partial y}\right\}dz\,dz\\ v&=-\frac{1}{G}\iint\left\{(\lambda+2G)\frac{\partial\xi_1}{\partial y}-G\frac{\partial\xi_2}{\partial y}-G\frac{\partial\xi_3}{\partial x}\right\}dz\,dz\\ w&=\int\xi_2\,dz\end{aligned}\right\} \qquad \text{------}(4)$$

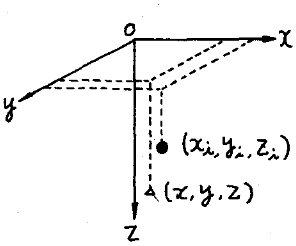

図-2

式(3)は、図-2の点(x_i, y_i, z_i)で特異点を持つ解であり、集中力問題の解を表わしてい

注) 基礎式(2)は図-1において、$z=0$の境界条件を満させる場合の式である。$x=0$、および$y=0$の境界条件を満足させる場合は残り2組の基礎式をそれぞれ用いる。

る。また式(3)を微分したものも解である。

2-1) 無限体の解; 本問題の特解にあたるものであるが次のようになる。(添字0をつけてあらわす。)

a) 鉛直力 P の場合

$$\xi_1^0 = A_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\quad \xi_2^0 = B_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\lambda+G}{2G}A_0\frac{\partial^3}{\partial z^3}(r),\quad \xi_3=0 \quad \text{-----(5)}$$

ただし,積分定数 $A_0=\frac{P}{4\pi}\cdot\frac{1}{\lambda+2G},\quad B_0=\frac{P}{4\pi}\cdot\frac{1}{G}$

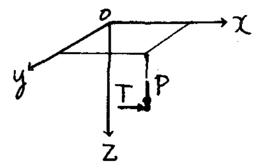

図-3

b) 水平力 T の場合 (式(5)の (x,z) の置換によっても得られる。)

$$\xi_1^0 = \bar{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\quad \xi_2^0 = \bar{B}_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{\lambda+G}{2G}\bar{A}_0\frac{\partial^3}{\partial x\partial z^2}(r),\quad \xi_3 = \bar{C}_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{--(6)}$$

ただし,積分定数 $\bar{A}_0=\frac{T}{4\pi}\cdot\frac{1}{\lambda+2G},\quad \bar{B}_0=0,\quad \bar{C}_0=\frac{T}{4\pi}\cdot\frac{1}{G}$

3. 境界条件; $z=0$ の面の境界条件を示す。(式(3)を用いる。)

a) 応力零の境界(自由面); $z=0$ において,

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z = 0 \quad \text{---(7-1)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\tau_{yz} = G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \quad \text{----(7-2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\tau_{zx} = G\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \quad \text{---(7-3)}$$

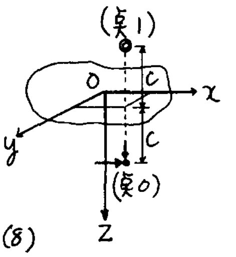

図-4

よって,

$$\left.\begin{array}{l}\text{式(7-1)} = \lambda\xi_1+2G\xi_2=0 \\ \text{式(7-2)+式(7-3)} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\xi_1+2G\xi_2)=0,\quad \text{式(7-3)-式(7-2)} = \frac{\partial}{\partial z}\xi_3=0\end{array}\right\}\ (8)$$

b) 変位零の境界(剛体との接触); $z=0$ において

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = e-\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{----(9-1)} \qquad w=\int\frac{\partial w}{\partial z}dz=0 \quad \text{---(9-2)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \text{---(9-3)}$$

よって, 式(9-1) $=\xi_1-\xi_2=0$, 式(9-2) $=\int\xi_2 dz=0$, 式(9-3) $=\xi_3=0$ ------------(10)

c) $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0,\ w=0$ (なめらかな剛体との接触);

図-5 に示すように,鏡像点に特異性を持つ解を重ねる。

d) $u=v=0,\ \sigma_z=0$ (面内方向に剛な物体との接触);

図-6 に示すように,鏡像点に特異性を持つ解を重ねる。

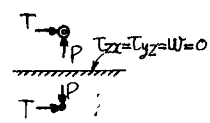

図-5

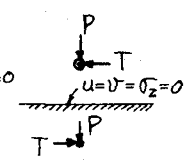

図-6

4. 境界条件式(8),または(10)を満足させる解; 図-4 に示すように,(点0)の鏡像点(点1)に特異性を持つ解を重ねることにより,式(8),または式(10)を満足させる。特解(5)に対する鏡像点で特異性を持つ解を示すと次のようになる。

$$\xi_1 = A_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)+A_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_1}\right),\quad \xi_2 = B_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}\right)+B_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_1}\right)+B_3\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{r_1}\right)-\frac{\lambda+G}{2G}\left\{A_1\frac{\partial^3}{\partial z^3}(r_1)+A_2\frac{\partial^4}{\partial z^4}(r_1)\right\},$$

$$\xi_3=0 \quad \text{---(11)}$$

一般に鏡像点で特異性を持つ解は,元の解に対し,2階高階な導関数を含む解として与えることにより,境界面内の関数のいかんにかかわらず式(8),または式(10)を満足するように積分定数を定めることができる。

5. 1/8無限体の解析解; (点0)で特異性を有する式(5),(6)に示す特解を与え,(点0)の鏡像点,およびその鏡像点の鏡像点(図-7の(点1)~(点7))に式(11)に示すような,より高階な導関数を含む解を重ね合わすことにより,$x=0,\ y=0,\ z=0$ の境界面で境界条件を満足するように積分定数を決定し,標記の解を得ることができる。

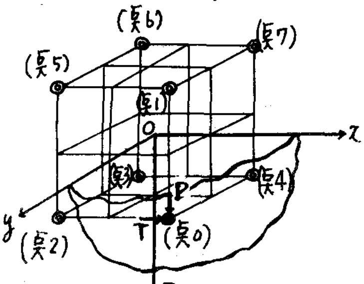

図-7