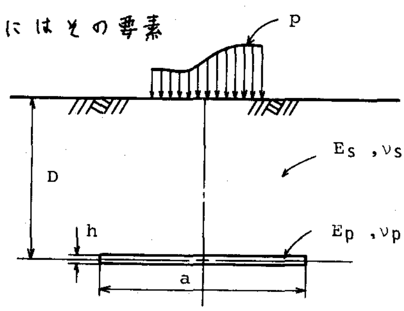
弾性体中に埋め込まれた構造物の一体解析

近畿大学理工学部　正員　谷平 勉
東洋技研コンサルタント　正員　宮崎平和
近畿大学理工学部　正員　○喜多茂夫

1、まえがき　土木構造物においては、マッシブなS－C構造物，地中埋設構造物，地盤の補強の問題など弾性体中に異種材料の構造物が埋め込まれた構造形式が数多い。このような問題に対応出来うる実用的な解法を見い出すことは有用であろう。

本報告は、埋め込まれた構造物が弾性母体と一体化し、合成構造物としての外力に対する諸特性を解析する1つの数値解法を提案しようとするものである。いま、弾性母体は均質等方性3次元要素、埋め込まれる構造物は、その形態・解析の目的に応じて1次元、あるいは2次元、3次元要素にモデル化し、それらの連成体として解析することができる。従って、弾性母体は、異種材料の構造物が埋め込まれることによって生じるその構造物表面の不静定力が母体内部に作用する問題として取り扱える。著者等が開発してきた数値解法[1]を併用するならば、母体として半無限体のみならず、より一般的な形状・境界条件の3次元体にも適用できる。また、埋め込まれた構造物は、その表面に不静定力が作用する問題として、別個に取り扱うことができる。これにはその要素次元・形状に応じて種々の方法が適用される。



本数値解法は、未知量は構造物表面の不静定力と、その不静定次数に応じた変位成分だけであり、比較的小規模の計算容量で行うことができる。また、弾性母体はBoussinesq, Cerruti, Mindlin 解の連続解で与えられるので、十分好精度の解が期待できる。

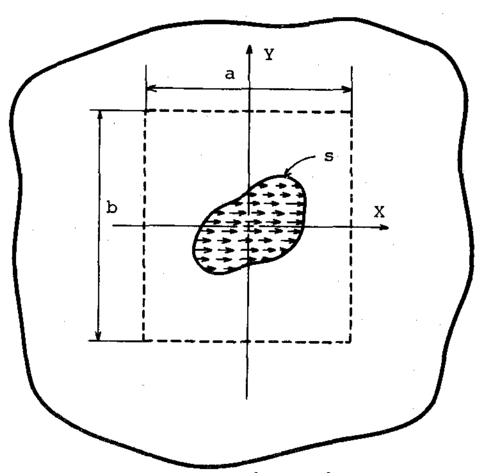
2、解法　基本的な1例として、図1のような半無限体中に全周自由な長方形薄板が埋め込まれた構造について、その解法を述べる。

板の曲げについてのつりあい方程式は、上・下面のせん断力による寄与を無視すれば、次式となる。

$$D\Delta\Delta W=S_z \qquad (s_z = s_{zo} - s_{zu}) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで、D；板の曲げ剛性，W；板のたわみ、s_{zo} ,s_{zu} 板上・下面の鉛直力の強度である。

板のシャイベ作用についてのつりあい方程式を、変位で表わせば次式となる



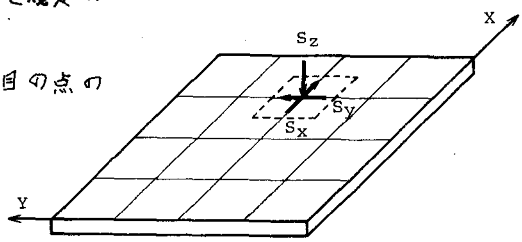
（図1）

$$G\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)+G\Delta u+\frac{1}{h}S_x=0 \qquad (S_x=S_{xo}-S_{xu}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$G\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)+G\Delta v+\frac{1}{h}S_y=0 \qquad (S_y=S_{yo}-S_{yu}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで、G；せん断弾性係数，ν；ポアソン比，u，v：x，y方向の変位、S_{xo},S_{xu}；板上・下面のx方向のせん断力の強度、S_{yo},S_{yu}；板上・下面のy方向のせん断力の強度である。いま、これらの3つのつりあい方程式を規定の境界条件の下で解くのに差分法を用いる。

図2に示されるように、S_x,S_y,S_z は1つの網目の点の影響面積において、平均化された物理量とみなす。なお、板周辺の面内力は、S_x, S_y に組み込むものとする



一方、半無限体については、板中立軸に相当する位置の変位 u,v,w は次式で表わされる。

（図2）

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ w &= w_0 + w_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

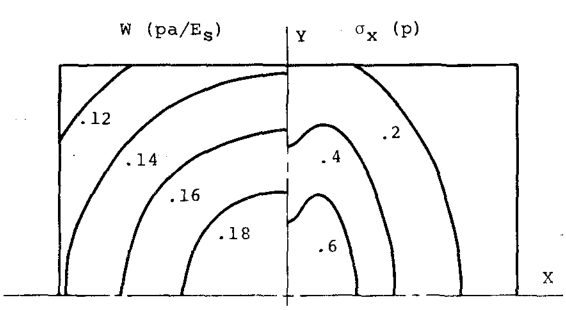
u_0,v_0,w_0 は、表面荷重による解である。これは Boussinesq, Cerruti 解によって求められる。この解は、半無限体に対して特解としての性格を持つ解である。いま、S_x,S_y,S_z は、半無限体において板中立軸の位置に作用するものとすれば、単位強さ $S_{xi}=1$, $S_{yi}=1$, $S_{zi}=1$ による u, v, w は Mindlin 解によって求められる。

$u_{1j}(S_{xi}=1)=u_{1ji}'$, $u_{1j}(S_{yi}=1)=u_{1ji}''$, $u_{1j}(S_{zi}=1)=u_{1ji}'''$ v,w についても同様に表わせば、

$$\left.\begin{aligned} u_{1j} &= \sum_i (u_{1ji}'\cdot S_{xi} + u_{1ji}''\cdot S_{yi} + u_{1ji}'''\cdot S_{zi}) \\ v_{1j} &= \sum_i (v_{1ji}'\cdot S_{xi} + v_{1ji}''\cdot S_{yi} + v_{1ji}'''\cdot S_{zi}) \\ w_{1j} &= \sum_i (w_{1ji}'\cdot S_{xi} + w_{1ji}''\cdot S_{yi} + w_{1ji}'''\cdot S_{zi}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

が得られる。その結果(1),(2),(3),(4),(5)式より、u,v,w,S_x,S_y,S_z を未知量とする1つの連立方程式系ができる。

3、数値計算例　不静定力S_x,S_yの半無限体に対する影響を無視すれば，板は曲げだけを考慮すれば良い。その結果、不静定力はS_zだけとなり問題が簡単化される。その問題の、表面に強度p，幅0.5aの正方形鉛直荷重が対称に載荷された場合についての板のw,σ_xのコンタ図を図3に示す。



$b/a=1/10$, $E_p/E_s=15$, $\nu_p=1/3$, $\nu_s=1/6$, $M=N$（分割数）$=10$ $D/a=1/2$ である。

（図3）

*) 例えば谷平・倉田；"弾性体の応力解析に対する一数値解法" 第30回土木年次講演会