

Biot の圧密方程式に関する一考察

京都大学工学部 正員 赤井 浩一
 " " 〇田村 武

1. はじめに

複雑な挙動を示す多次元圧密は、厳密には Biot の方程式に支配されると考えられる。それは、変位系と過剰間げき水圧を同時に含む連立偏微分方程式からなり、わずかの解析解といくつかの数値解法が提案されているものの、いまだ多次元圧密現象のもつ機構は明らかにされるに至っていない。本研究では、線形弾性をもつ構造骨格と非圧縮的な間げき水からなる理想的な飽和粘土を仮定したうえで、Biot の圧密方程式から変位成分を消去し、Terzaghi の一次元圧密の方程式と類似な形をもつ多次元圧密の基礎方程式を誘導するとともに、その適用例について述べる。

2. 過剰間げき水圧のみで表現した Biot の方程式

Biot の方程式は一般に以下のように表現される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \frac{\partial p_e}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p_e \\ \text{境界条件: } u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_u, \quad T_i = \bar{T}_i \text{ on } S_\sigma \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p_e \quad (2)$$

$$\text{境界条件: } u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_u, \quad T_i = \bar{T}_i \text{ on } S_\sigma$$

ここに用いた記号はつぎのとおり。

λ, μ : Lamé の定数, k : 透水係数, γ_w : 間げき水の単位体積重量

u_i : 変位成分, p_e : 過剰間げき水圧, e : 体積ひずみ

$\bar{u}_i$: 変位境界 S_u 上の既知変位, $\bar{T}_i$: 応力境界 S_σ 上の既知応力

圧密が完全に終了したのちは、通常の弾性問題に帰着する。そのときの变形、応力状態を基準にして圧密中の状態をみれば、 $v_i = u_i - u_{fi}$, $\theta = e - e_f$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial p_e}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p_e \\ \text{境界条件: } v_i = 0 \text{ on } S_u, \quad T_i = 0 \text{ on } S_\sigma \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p_e \quad (4)$$

$$\text{境界条件: } v_i = 0 \text{ on } S_u, \quad T_i = 0 \text{ on } S_\sigma$$

となる。

ここに u_{fi} , e_f は u_i および e の最終状態における値とする。方程式自体の形は式(1), (2)と同じであるが、境界条件が斉次であるために変位 v_i は過剰間げき水圧 p_e のみによるものである。そこで、又 χ に“集中過剰間げき水圧”が作用したときのつりあい式

$$\mu \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta(x, \chi)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

の解を $U_i(x, \chi)$ とすると、式(3)における v_i と p_e の関係は

$$U_i(x) = \int_V U_i(x, X) P_e(X) dV \quad (6)$$

とかける。ここに $\delta(x, X)$ は δ -関数を意味する。変数 x について両辺の発散をとると

$$\theta(x) = \int_V \Theta(x, X) P_e(X) dV \quad (7)$$

となる。

ここに $\Theta(x, X) = \frac{\partial}{\partial x_i} U_i(x, X)$ である。これの逆関係をとって

$$P_e(x) = \int_V \Theta^{-1}(x, X) \theta(X) dV \quad (8)$$

なる表現が可能である。ここに $\Theta^{-1}(x, X)$ は、点 X に“集中体積ひずみ”を、その他の点の体積ひずみを零と拘束した場合における過剰間げき水圧の分布を意味する。圧密中の各時刻において式(8)を適用すると、 P_e , θ は時間 t の関数であるが、 $\Theta^{-1}(x, X)$ は不変である。その意味で式(8)の両辺を時間で微分し、式(4)へ代入するとつぎの基礎方程式が誘導される。

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \int_V \Theta^{-1}(x, X) \nabla^2 P_e(X) dV \quad (9)$$

これが、過剰間げき水圧のみで表現した Biot の圧密方程式である。

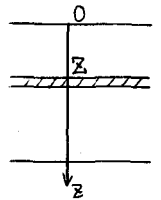
3. 基礎方程式の適用

① 一次元圧密 深さ z における単位体積変化を与えたときの過剰間げき水圧は、

$\Theta^{-1}(z, z) = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G \cdot \delta(z, z)$ となり、式(9)に代入して Terzaghi の方程式

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{k}{\gamma_w} \frac{d^2}{dz^2} P_e \quad (10)$$

に帰着する。ここに G , ν はそれぞれ、せん断弾性定数、Poisson 比である。

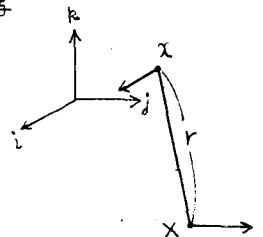


② 三次元無限領域の圧密 点 X に j -方向の単位の集中力を与えた場合、 r だけ離れた点 x に生じる i -方向の変位は

$$U_i(x) = G_i^{-1}(x, X) = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{1}{4(1-\nu)} r_{,ij} \right\} \quad (11)$$

と表されるが、変数 x および X で発散をとることにより

$$\Theta^{-1}(x, X) = -\frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \delta(x, X) \quad (12)$$



なる関係を得る。これは、一次元圧密とまったく同じ形であって、三次元無限領域でも Terzaghi の方程式が成立することを示している。

③ 一般有限領域 有限領域においては、境界の存在による過剰間げき水圧の発生 $\Gamma(x, X)$ が加えられて、一般に式(9)はつぎの形をとる。

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \nabla^2 P_e + \int_V \Gamma(x, X) \nabla^2 P_e dV \quad (13)$$

ここに右辺第2項が、境界の存在による修正項であって、ときに吉岡が定義した“圧密ポテンシャル”の時間微分に相当する。また、 $\nabla_x^2 \Gamma(x, X) = 0$ である。