

砂粒運動に伴う砂面擾乱の初生について

京都大学工学部 正員 中川 博次
 京都大学大学院 学生員 辻本 哲郎
 京都大学大学院 学員 矢田 篤

掃流現象を砂粒レベルで観ると、個々の砂の動きを stochastic に扱うことは次の理由で非常に有効である。
 (1) 砂粒の運動は離散的(間歇的)であるため、sediment pick-up rate p_s などには rate というよりもむしろ単位時間当りの確率密度と見なせる。(2) 砂粒の運動を支配するのは河床での砂の配列、流砂力の変動などランダムな要素が強い。(3) stochastic な方法では、得られている情報だけ現象をモデル化でき、情報が豊かになるにつれてモデルを逐次改良することができる。

以上の観点から、まず河床において砂粒のランダムな離脱、落下が繰り返されることによる河床高の変動の程度を推定することを試みた。すなわち、砂面上の一点(砂粒1個の占める面積)における砂面高さ $y = nd$ で表わし初期の高さを0とし、また d : 粒径)の変化に対する素過程は砂粒の離脱および落下で、これらの起こる単位時間当りの確率密度をそれぞれ μ_s, μ_d とすると、Smoluchowski の条件を適用し、 n に関する次の式が得られる。

$$p(n; t + \Delta t) = [1 - (\mu_s + \mu_d)\Delta t]p(n; t) + \mu_s \Delta t p(n+1; t) + \mu_d \Delta t p(n-1; t) + o(\Delta t) \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $p(n; t)$ は初期に $y=0$ である時、時刻 t で $y=nd$ となる条件付確率であり、また $o(\cdot)$ は、Landau の2である。 $\Delta t \rightarrow 0$ とし、 $p(n; t)$ に関する微分方程式

$$d p(n; t) / dt = -(\mu_s + \mu_d) p(n; t) + \mu_s p(n+1; t) + \mu_d p(n-1; t) \quad \text{---- (2)}$$

が得られる。式(2)の両辺を n 倍して n について $-\infty$ から $+\infty$ まで加え合わせると、左辺 $= (d/dt) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n p(n; t)$
 $= d[E\{n\}]/dt$, 右辺 $= -(\mu_s + \mu_d) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n p(n; t) + \mu_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+1) p(n; t) + \mu_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1) p(n; t)$ となり $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(n; t) = 1$ であることから、結局次式のように n の期待値 $E\{n\}$ (1次元 x - t) に対する微分方程式に書き換えられる。

$$d[E\{n\}]/dt = \mu_d - \mu_s \quad \text{---- (3)}$$

n の高次モーメントに対する微分方程式も同様の手法で求められ、一般に $E\{n^i\}$ について表示すれば"次のようである。 $d[E\{n^i\}]/dt = \sum_{j=1}^i C_j \{\mu_d + (-j) \mu_s\} E\{n^{i-j}\}$ (4)

いま、平均的には流砂が平衡していると考えれば、 $\mu_s = \mu_d \equiv \mu$ で、このとき微分方程式(4)は、逐次解け、 $E\{n\} = 0$, $E\{n^2\} = 2\mu t + C_0$, $E\{n^3\} = 0$,
 ---- (C_0 : 積分定数) が得られる。エルゴード性を仮定すると、 $\{n\}$ は河床高の水路方向の分布とみなすことができ、 $E\{n\}$ は平均河床高、 $E\{n^2\}$ はその分散を表わす。河床高の分散は σ^2 , skewness を Sk とすると、 $\sigma^2/d^2 = 2\mu t$, $Sk = E\{n^3\} / (E\{n^2\})^{3/2} = 0$ (ただし初期において全く平坦とし $C_0 = 0$ とおいた) となり、また奇数次モーメントはすべて零となることが示され、河床高分布は正規分布で良く近似されることがわかる。

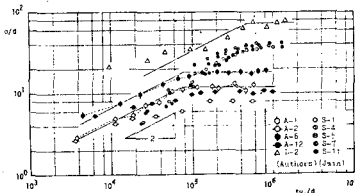


図-1 河床高標準偏差の時間的变化

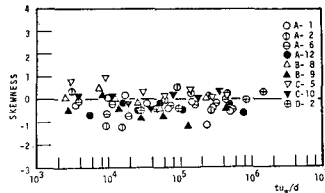


図-2 河床高分布のひずみ度

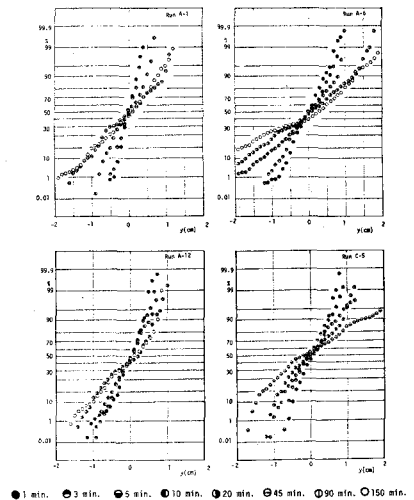


図-3 河床高分布の例

ただし、ここでは μ を一歩進としたが、 n の変動が大きくなると明らかに n の関数となるので、以上の議論は砂面擾乱の初生期のみに限られる。 n とすなわち河床高 y と μ の関係は実験によって概略は調べられているものの詳細は明らかでなく今後の研究課題である。以上に得られた結論は著者が行った河床高の発達と砂粒移動に関する実験結果¹⁾ によって検証された。ところで、 μ は単位時間当りの砂の離脱確率密度でこれは著者が sediment pick-up rate ρ_s として、底面せん断応力 τ との関係を求めているものと同等であり、次式によって推定される。

$$\rho_s \sqrt{d(10\tau-1)} = 3 \times 10^{-2} \tau (1 - \frac{\tau_c}{\tau})^3 \dots (5)$$

ただし τ_c は限界の無次元掃流力であり、また式(5)は著者が得た ρ_s の推定式の近似表示で、図-4 に示されるように理論曲線、実験値と良く合致している。

これを用いると河床高の分散の時間的变化は、 $(\sigma/d)^2 = 6 \times 10^{-2} \tau (1 - \frac{\tau_c}{\tau})^3 t \sqrt{10\tau-1}/d$ となり、次式が得られる。

$$(\sigma/d) \sqrt{t \sqrt{10\tau-1}} = 0.24 \tau^{1/4} (1 - \frac{\tau_c}{\tau})^{3/2} \dots (6)$$

式(6)は実験によって検証したものが図-5 である。これを見ると、河床高分布の時間的变化は式(6)で概ね説明できるが、実験値の方が若干小さ目となっている。

これは、砂面上の一点での砂粒の離脱・落下を独立な事象と扱ったことによる。すなわち、 μ_s と μ_d は次のように step length の関係がけられ、step length についての情報を知ることでより忠実に現象が説明される。

$$\mu_d(x) = \int_0^\infty \mu_s(x-s) f_s(s) ds \dots (7) \quad (f_s(s): \text{step length の確率密度関数})$$

また、時刻 t の河床高の水路方向の分布は、

$$y_t(x) = \{ \mu_d(x) - \mu_s(x) \} A_1 d t \dots (8) \quad (A_1: \text{砂の形状係数})$$

で表わされる。式(7)は、 μ_d が μ_s と $f_s(s)$ の畳み込み積分であることを示しており、 μ_d は μ_s を input とし、 $f_s(s)$ を impulse 応答とする線型系の output であることがわかる。ところで、河床高の自己相関関数は、

$$R_{yy}(x) = A_1 d t \cdot E \{ [\mu_d(x) - \mu_s(x)] \cdot [\mu_d(x-x) - \mu_s(x-x)] \} \\ = A_1 d t \cdot [R_{dd}(x) - R_{ds}(x) + R_{ss}(x) - R_{sd}(x)] \dots (9)$$

で与えられる。ここに、添字 d は μ_d 、 s は μ_s に関する量を示すものとする。次に、畳み込み積分定理を用い、さらに μ_s から μ_d に変換するときのシステム関数が $H(ik) = \int_0^\infty f_s(s) e^{iks} ds = 1/(1+ikl_0)$ であることを考慮すると (k/l_0 : 擾乱の波数、 l_0 : 平均 step length)、河床高のパワースペクトル密度関数は、 $S_{yy}(k) = [w^2/(1+l_0^2 k^2)] A_1 \cdot d \cdot S_{ss}(k) \cdot t \dots (10)$ となる。ここにおいて $S_{ss}(k)$ は μ_s の場所的変動に関するもので、今のところその詳細は未知である。図-6 は $R_{ss}(x)/R_{ss}(0) = e^{-x/l_0}$ と仮定して実験結果と式(10)を比較したものであるが、今後、 μ_s の時間的・場所的変動特性などの検討が必要である。さらに、河床の凹凸が顕著になるときに時の ρ_s 、step length の特性について今後の課題である。

参考文献

- 1) 中川・辻本・矢田：昭和51年度関西支部年次講演概要，1976。
- 2) 中川・辻本：土木学会論文報告集，1975。

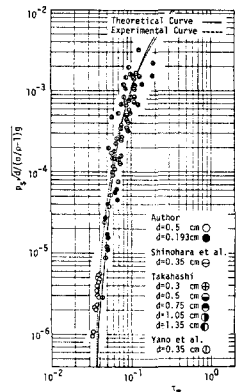


図-4 sediment pick-up rate と τ の関係

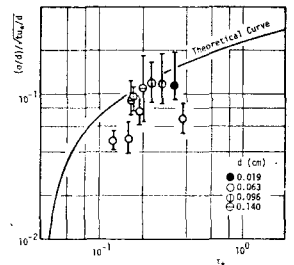


図-5 式(6)と実験値の比較

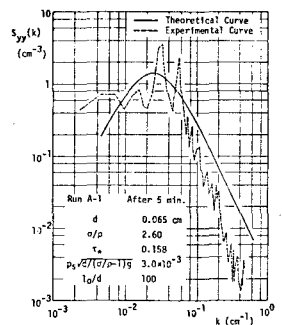


図-6 河床高の波数スペクトル密度の例