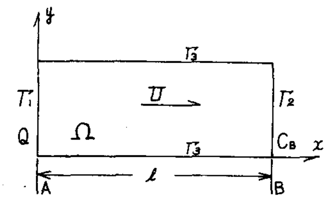
有限要素法による拡散解析（その１）
－境界条件の取扱いについて－

大阪大学工学部　正員　椹木亨・中辻啓二
日本情報サービス(株)　正員○和手信泰・安永通晴

1. はじめに；　有限要素法(FEM)は領域の形状や境界条件の表現法、汎用性において差分近似法よりも優れているとされるが、これまでは形式的な定式化を通して直接実際現象との解の比較を行なうことが多かったようである。そこで本報では拡散解析を例にとりFEMにおける境界条件、負荷条件の与え方について述べ、その解を解析解と比較し、両条件の共通性についても言及する。

2. 基礎式；　いま図-1に示すように一様な水路の断面Aにおいて、ある負荷が与えられ、断面Bで濃度C_Bとなる定常現象を考える。ここで拡散係数をK，自浄係数α，負荷量の発生をQ，濃度をCとし、簡単のためにK，αは一定であると仮定すると、この問題は次の偏微分方程式により記述される。



図－１

$$L(C)= u\cdot(\partial C/\partial x)+v\cdot(\partial C/\partial y)-K\cdot(\partial^2C/\partial x^2+\partial^2C/\partial y^2)+\alpha C-Q=0 \qquad (1)$$

本論では諸量を８節点のアイソパラメトリック要素を用いて

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{8}S_i(x,y)\phi_i \quad (2)$$ ［ϕ_i：節点iにおけるϕの値　$S_i(x,y)$：節点iにおける形状関数］

の様に近似し、重み付き残差法の一種であるGalerkin法を用いて定式化を行なった。

3. 境界条件；　図-1で示される問題についてΓ_2,Γ_3においては次式の固定した条件、

$$C=C_B \qquad x,y\in\Gamma_2 \qquad (3)$$

$$\partial C/\partial y=0 \qquad x,y\in\Gamma_3 \qquad (4)$$

を与える。　一方Ω内にQはないものとして、Γ_1において

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & C=C_A \qquad (5)\\ \text{II} & K(\partial C/\partial x)=q \qquad (6)\end{array}\right\} x,y\in\Gamma_1$$

の２種の条件I,IIのいずれかを与えることにより負荷のあることを表現した。また濃度固定の条件は、2.で得られたϕ_iを未知数ベクトルとする行列方程式の未知数を既知数と置きかえることにより与えることができる。　さらに(4),(6)式のような濃度勾配を与えるには次式の様に定式化の過程でGreenの定理を用いて変形し導出した線積分内の該当部を既知量で直接置きかえれば良い。

$$K\iint_\Omega S_i\left(\frac{\partial^2C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2C}{\partial y^2}\right)dxdy=K\iint_\Omega\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial S_i}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial S_i}{\partial y}\right)dxdy-q\oint_{\partial\Omega}S_i\,ds \qquad (7)$$

つまり前者は各点で、陽に与えられるのに対し、後者は線上で且つ行列方程式の定数ベクトルの中に陰に与えることになるのである。　従って(6)式の条件を与えた場合、Aにおける濃度は、u, K, αの関数となる。　以下で述べる様に濃度勾配qを与える事と発生量Q

を与える事が本質的に同じであるので、この事は充分念頭に置かねばならない。図-2は2種の拡散係数K_1, K_2に対する濃度分布である。K_1は断面Aで両条件共同じ濃度になる様に与えたもので分布形状も全く同じになる。一方K_2を用いて計算すると、断面Aでの濃度が増え分布形状も異なるが、いずれも解析解と良好な一致を示している。

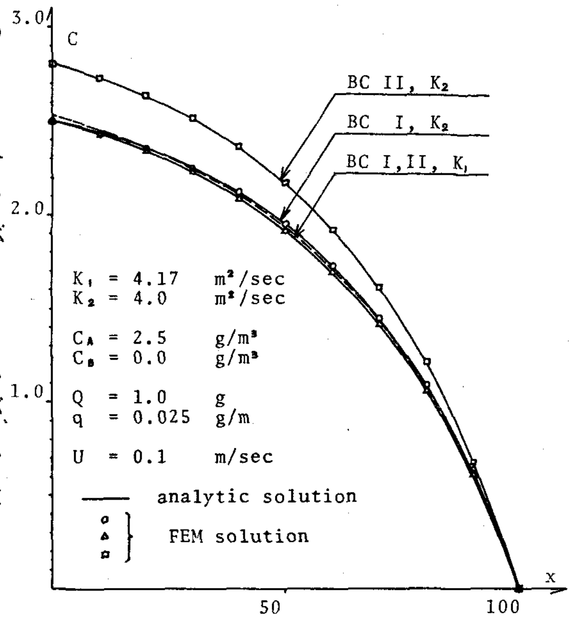


図-2

4. 負荷条件；以上はあくまでも発生負荷量を濃度もしくは濃度勾配として与えたが、シミュレーションの立場では、排出量を用いた方が一般的にわかり易い。従来(1)式のQに関しては形式的に

$$\iint_\Omega S_i Q\,dxdy = \sum_{j=1}^{8}\left[\iint_\Omega S_i S_j\,dxdy\right] Q_j \qquad (8)$$

として各節点でQ_jを指定している場合が多いが、これは次の理由により誤りをおかしている。すなわち図-3の様にある要素の頂点jでQ_jを与えることは、その要素内で形状関数の形に負荷させることになり、結果として要素の大きさにも関係することになるからである。これを避けるには次の様にして要素内にQを一様分布させその要素で境界を近似してやれば良いと考えられる。

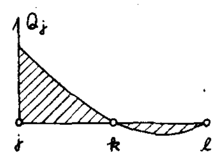


図-3

$$\iint_\Omega S_i \bar{Q}\,dxdy = \bar{Q}\iint_\Omega S_i\,dxdy,\quad \bar{Q} = Q\Big/\iint_\Omega dxdy \qquad (9)$$

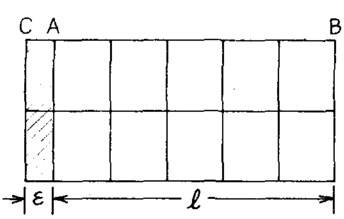


図-4

図-4において斜線部が要素によるΓ_1の近似であり、計算上断面Cの条件は$\partial C/\partial x = 0$である。$\varepsilon = 0.01\,l$の場合を図2の破線で示す。(ここに$q$と$Q$は等価となる様に与えてある。) つぎにこの状態で$\varepsilon \to 0$とするとAB間の濃度分布はAにおいて濃度勾配を与えた場合に漸近して行く。この様子を示したのが図-5である。

5. 結語；一次元的現象を例にとり、解析解とFEM解の比較を行なった結果両者の良好な一致をみた。また一般には、連続関数では表わしえない負荷Qが与えられる場合にもFEMにより良好な近似が可能であること、及びそれが濃度勾配と本質的に等価であることも示した。同じ考え方が二次元問題にも適用できるが、それについては次回に譲りたい。

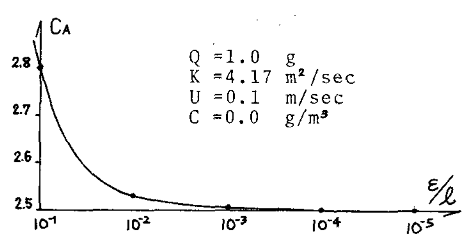


図-5