

弾性不安定現象に関する基礎的研究

京都大学工学部	正 員	丹羽 義次
京都大学工学部	正 員	渡辺 英一
京都大学大学院	学生員	○中川 昇

(1) はじめに.

高強度の材料の開発に伴って、今日では、構造物の部材は、ますます、細く薄くなる傾向にあり、幾可学的非線形解析の重要性が、増している。

座屈の問題については、固有値問題により、構造物の挙動が、あらまし推定できる。しかし、それが完全にあてはまるのは、構造物において、Imperfections のない、理想的な場合に限られる。実際の構造物には、必ず Imperfections が存在するが、これが、場合によっては、構造物の挙動に多大な影響を及ぼす。

本研究では、一般的な多自由度系の構造物について、Imperfections が、安定性に及ぼす影響を調べた。数値解析モデルとしては、2自由度系のものを考えた。Imperfection としては、初期たわみを考え、そのモードの及ぼす影響を各種の不安定問題について、明らかにしようとしたものである。

(2) 弾性不安定の一般的分類

ポテンシャルエネルギー $V(Q_i, P)$ は一般に次式で与えられる。

$$V = \frac{1}{2} \{Q\}^T [K^L + K^{NL}] \{Q\} - \frac{1}{2} P \cdot \{Q^T\} [K_q^L + K_q^{NL}] \{Q^T\}$$

ここに

p : 荷重のパラメーター

$\{Q\}$: 初期たわみのある状態からの変位ベクトル

$\{Q^T\}$: 初期たわみのない状態からの変位ベクトル

$[K^L]$: ひずみエネルギーの線形マトリックス

$[K^{NL}]$: ひずみエネルギーの非線形マトリックス

$[K_q^L]$: 外力方向変位の線形マトリックス

$[K_q^{NL}]$: 外力方向変位の非線形マトリックス

であり、また初期たわみベクトルを $\{E\}$ で表わせば、次式の関係がある。

$$\{Q\} = \{Q^T\} - \{E\}$$

ポテンシャルエネルギーが極値をとることが、平衡条件であるから、

平衡条件式は

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = 0$$

ポテンシャルエネルギーの増分は次式で示される。

$$\delta V = V_i \delta Q_i^T + \frac{1}{2} V_{ij} \delta Q_i^T \delta Q_j^T + o(\delta Q^3)$$

ここに

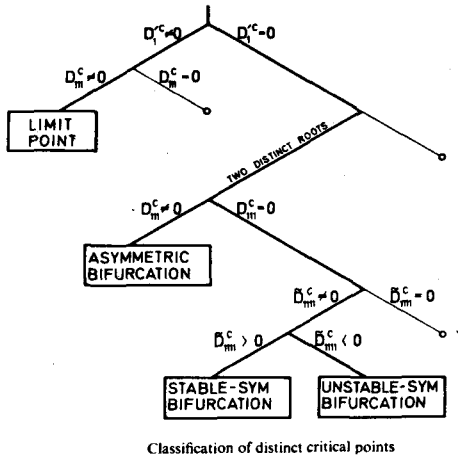
$$V_i \equiv \frac{\partial V}{\partial Q_i^T}, \quad V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i^T \partial Q_j^T}$$

であり、 i, j はダミーを示す。

ところで $V_i = 0$, $\delta V > 0$ のとき、安定な平衡状態にあるから、安定性マトリックス V_{ij} について論ずると

$$V_{ij} = \begin{cases} \text{正定値 (positive definite)} & \text{—— 安定 (stable)} \\ 0 & \text{—— 安定性は } \delta V \text{ の高次の項に依存 (critical)} \\ \text{負定値 (negative definite)} & \text{—— 不安定 (unstable)} \end{cases}$$

上述のように V_{ij} が負定値をとるとき不安定であるが、不安定を分類するために以下の操作を行なう。さて、ポテンシャルエネルギーが線形 ($[K^{NL}_{ij}] = [K^L_{ij}] = 0$) のとき、 $V_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ では、安定を論ずるに、不都合である。よって次の操作で、 V_{ij} を対角化する。



$$K_{ij} Q_j^T - P K_{ij} Q_j^T = 0$$

($\{E\} = 0$ の場合の平衡式)

より求めた固有ベクトルを列成分とする行列を、 Φ_{ij} とする。ここで

$$\{Q^T\} = [\Phi] \{R^T\}$$

なる座標変換をほどこし、 V を $\{R\}$ で表わせば、

$$V(Q_i^T, P) \equiv V^*(R_i^T, P)$$

このとき

$$V_{ij}^* = 0 (i \neq j)$$

である。

ポテンシャルエネルギーが、非線形の場合は、線形項のみを取りあげて、上述の方法で、 Φ_{ij} を求め、 V に座標変換をほどこし、 $V^*(R_i^T, P)$ を求める。

こうして求めた V^* の線形項を、 D とすれば、不安定性は、図のように分類できる。ただし、 D は $\partial^2 V / \partial p^2$ であり、添え字の C は、critical 状態であることを示す。

詳細について、さらに解析結果については、当日発表する。