巨大構造物の解析法へのグラフ理論の適用

京都大学工学部　正員　白石成人　京都大学工学部　正員　谷口健男
京都大学大学院　酒井 誠　西松建設　正員〇高嶋章光

1.まえがき……構造解析の分野で最もよく用いられる手法は変位法である。変位法において剛性行列の逆行列演算は非常に重要な地位を占めている。特に近年対象とする構造物が巨大化し全体系の剛性行列を直接解くことは計算機の容量・演算時間・精度などの点で困難になってきている。その解決法の1つとして分割解析法、例えばG.H.Kronの Tearing and Interconnecting Method がある。この方法においては任意系の任意分割が可能であるが実際に分割する場合、まず最初に問題になる分割個所の選定に関しては何ら示されていない。[1] 本論においては最適分割個所の選定方法を提案することを目的とする。

2.分割解析法の概略と逆行列演算のための演算回数の評価

Kronの分割手法は以下のStepよりなる。[2] Step 1……与えられた系を計算機の容量を考慮し、任意に分割する。Step 2……各部分系の逆行列を独立に求める。Step 3……各部分系を順次接合し全体の逆行列を求める。

全体系をグラフに置換すると分割された2つの部分系はSubgraph V_1, V_2に、そして切断される部材は全体系Vの1つの枝集合であるCutSetに相当する。よって分割はまさしくCut-Setの問題となりそれの取り扱いが重要な課題となる。Kronの方法では全体系を部分系に分割しそれぞれ独立に解を求めた後部分系を接合させるための修正を行なうがこの修正部分にあたるのがCutSetである。よって分割個所選定においては1つにはCutSetの少ない断面で分割すればよいことは確かである。しかしそれ以外に演算回数は分割されたSubgraphの点の比率にもdependする。以下のHouseholderの公式を使った場合の演算回数の評価を行う。

$$(Z+U^tKV)^{-1}=Z^{-1}-Z^{-1}U^t(K^{-1}+VZ^{-1}U^t)^{-1}VZ^{-1}\quad\text{(Householderの公式)}\quad\cdots\cdots(1)$$

(1)式において各々のSubgraphの元数はn_1, n_2でありそれらの再結合に要する線すなわちCutSetはmである。

1般にガウスの消去法を用いて逆行列を求めると元数がxのもので演算回数はx^3回となる。よって全体系の剛性行列の逆行列を求めるのに要する演算回数の合計は次のようになる。

$$N.C.(K^{-1})=B^3\{n_1^3+n_2^3+16m^3+6m(n_1^2+n_2^2)+8m^2N+8mN^2\}\quad\cdots\cdots(2)$$

ここでKは全体系の剛性行列，N.C.は演算回数，Bは自由度である。

(2)式を$m\ll N$より次のように変形する。

$$N.C.(K^{-1})\fallingdotseq B^3\{N^3-(3n_1n_2N+12n_1n_2m-8m^2N-8mN^2)\}\quad N:\text{全節点数}\quad\cdots\cdots(3)$$

分割による演算回数の減少率をPとすると(3)式は次のようになる。

$$P=-8\beta^2-\{8-12\alpha/(1+\alpha)^2\}\beta+3\alpha/(1+\alpha)^2\quad \alpha=n_1/n_2\ (n_1\leq n_2),\ \beta=m/N\quad\cdots\cdots(4)$$

(4)式をもとに次の3つの図表を作った。

(1) N－mグラフ（図－1）……横軸に節点数N，縦軸にCutSet mをとる。
α，Pをparameterとして与えた時のNとmの関係を示す。

(2) m－Cグラフ（図－2）……C：2分割した時の演算回数と分割しない時の演算回数の

比，$C=1-P$，横軸にCutSet m，縦軸にCをとった。N，αをParameterとして与えた時のmとCの関係を示している。

(3) N－C/mグラフ(図－3)……横軸にN，縦軸にC/mをとった。このグラフはm－Cグラフにおける傾きの変化を表わしている。

以上のグラフより次のことがわかった。

I 分割個所選定においては次のように系の大きさを考慮しなければならない。(1)系が小さい所ではCutSetの最少化が非常に重要で系の形状をよく把握しなければならない。(2)系が大きくなるとわずかなCutSetの増減は問題でなく2等分割に近い所を探さねばならない。

II N－C/mグラフより$N\cdot C/m \fallingdotseq 6.0$が得られるがこの式ではαの項を無視している。よって実際には次のようになる。$C=6.0\,\frac{m}{N}+1.0-\frac{3.0\alpha}{(1+\alpha)^2}$ ……(5)

よって次節では節点数Nを考慮した分割個所選定法を提案する。

3. 分割個所選定法の提案

図1・2・3より節点数により3つの型に分けて考える。

ⓐ Nが500点以下の系　ⓑ Nが2000点程度の比較的大きな系

ⓒ Nが3000点以上の大きな系

以下a，b，cに分けて分割個所選定法を提案する。

ⓐ αに比べmの最少化が重要である。Step 1．系の長手方向に直角に交わる2等分断面をS1，1：2に分割する断面をS2とし図-1を用いて比較する。Step 2．S1とS2の間でこの2つに交わらない断面をS3とする。そしてS3とStep 1において効果的であった方の断面の間でStep 1，Step 2と同じ操作をくり返す。この反復操作によって切断面を決定する。ⓑ mと同様にαに関しても考慮する。Step 1 系の長手方向に直角に交わる1/1断面をS1，1/2断面をS2，7/10断面をS3とし図-1を用いて比較する。Step 2．Step 1において最も効果的であった断面と次の断面の間でaと同様の反復操作を行い切断面を決定する。ⓒ わずかなmの増減は演算回数に余り影響しない。よってこのような大きな系では2等分割に近い所で分割すればよい。

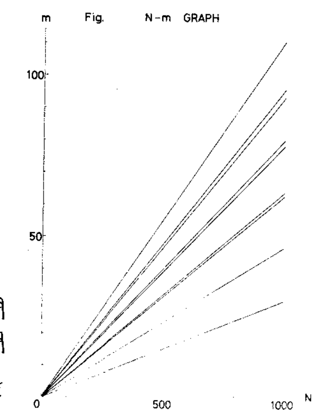

図 1

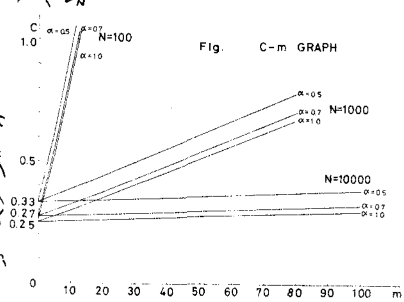

図 2

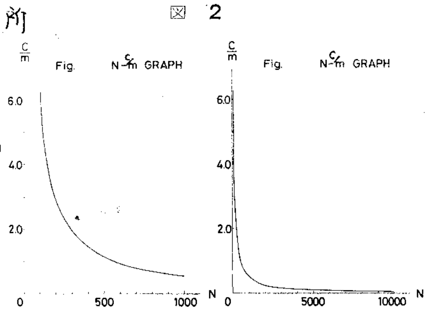

図 3

4. あとがき

……本研究ではKronの方法に基づき分割個所選定を主目的として考察を行った。最適分割個所は系の形状だけでなく節点数Nにもdependすることがわかった。しかし節点数が小さい系ではCutSetの最少化が主目的であり　双対グラフのMinimum Pathを用いるなどグラフの真の形状特性を十分に把握する必要がある。[3]

参考文献　1) F. Harary, "Sparse Matrices and Graph Theory", Large Sparse Sets of Linear Equations, Academic Press 1971　2) F.H. Branin, "The Relation between Kron's Method and The Classical Methods of Network Analysis," I.R.E. WESCON Convention Record, Part 2. 1959　3) I. Konishi et al, "Reducing The Bandwidth of Structural Stiffness Matrices," J. Struct. Mech., 4(2), 1976