# グラフ理論に基づく構造物への節点番号付け自動化について

京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　○谷口健男

## 1. まえがき

構造解析の分野において連立一次方程式の解法は重要な地位を占め、今日では多くの手法が提案されているが、その基本となるのはガウスの消去法である。それら手法は係数行列の特性(対称性，スパーシティー)や対象構造系の形状特性を有効に利用し、容量や演算回数の減少をはかろうとする。特によく利用されるのは係数行列内の零要素を除き、可能なかぎり必要最低限のデータ量で行列を処理しようとする試みである。しかしながらデータ量を少くすればする程消去法のプログラムが複雑になる。本研究ではまず、ガウス消去法をグラフ理論を基にして考察を行い、つづいてデータハンドリングが容易なBand Matrix法[1]，帯幅内零要素をさらに除くProfile減少法[1]，およびプログラムは複雑であるが、データ量を最少にしうるSparse Matrix法のためのLabeling法とその自動化について考察する。

## 2. ガウス消去法のグラフ理論的考察

係数行列を $A=[a_{ij}]$ であらわす。これを剛性行列とすれば対称，正定値である。$a_{jk}$ は前進消去により以下のように変形される。

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot a_{ik} \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = j, j+1, \cdots, n \\ j = i+1, i+2, \cdots, n \end{array} \right. \tag{1}$$

ここで(~)は修正された値を示す。いま、Aがある番号順序で並べられていたと仮定すれば、その非零要素のenvelopeより外側の零要素は常に零のままであることがわかる。この結果を利用しようとするのがBand Formあるいは Profileの考え方である。さらに上式においてたとえAのある要素 $a_{jk}=0$ であったとしても

$$\left. \begin{array}{lll} \text{if} & d(i,j) = d(i,k) = 1, & \tilde{a}_{jk} \neq 0 \\ \text{if} & d(i,j) > 1 \text{ or } d(i,k) > 1, & \tilde{a}_{jk} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

ここでd(i,j)とはi，j両点間の距離を示す。すなわち $a_{jk}$ が例え零であったとしても前進消去の過程において非零化する可能性があることを上式は示し、よってλ力データとして非零要素のみ用いるときでも、新たな非零要素の為のスペースを準備しておかねばならない。このような要素をfill-inと呼ぶ。いま注目する点をiとすると、それに関与する点は その次数分だけ存在する。もし、それら全ての節点間において d(j, k) = 1 の関係が存在するときのみfill-inが発生しない。言いかえれば，i点を消去しようとする場合iよりの距離=1を満足する全ての点が完全グラフを構成する場合においてのみ fill-in = 0 となることがわかる。よって任意の完全グラフについては fill-in が発生しないのは自明であり，さらに任意のTree Graphもfill-inを発生させないような点順序が存在し，n点より構成されるI-Mesh Graphにおいては必然的に(n-3)個のfill-inが発生する。また消去法において一度消去された点に関しては以後の消去過程において何ら考慮する必要はない。すなわち消去の各過程において対象とする系の大きさ，形状は順次小さくなることがわか

る。これを表現すれば

$$G(n) \longrightarrow G(n-1) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow G(2) \longrightarrow G(1) \qquad (3)$$

fill-inは各段階で消去される1点と接続する全ての点より構成されるsubgraphを完全グラフに置くのに必要な線の本数である。消去過程は系の各点を1個づつ消去せしめ最終的に1点にまで縮少することと同等であると考えられる。

前進消去が終った段階において、係数行列は上三角行列となる。すなわち

$$\tilde{a}_{kj} = 0 \quad (k > j) \qquad (4)$$

この状態においては、$j \to k$への量的伝達は可能であるが、逆に$k \to j$への伝達は存在しなくなる。消去前はその方向性は任意であり $a_{kj} = a_{jk}$ が成立していたが、消去過程を経ることにより、順次方向性が定められ、その終了時にはグラフが弱連結となったことがわかる。この特性はあきらかに有向グラフのそれに一致する。元来無向グラフと考えられた系が、前進消去により有向グラフ[2)]に置換されたことを示す。よって後退代入は、その演算の進め方が一義的に定められることになり、実際 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ の順に解が求められることになる。以上のことをまとめれば、Gaussの消去法とは元の系を表わす無向グラフに一義的な有向性を与え、その有向グラフの特性より解を見い出す方法と云える。

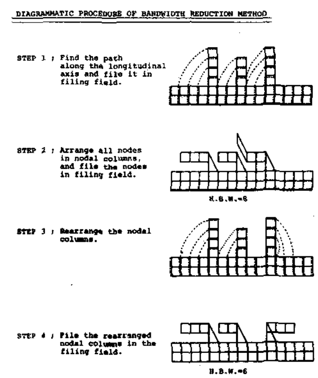


図-1. 帯幅減少法

## 3. 節点番号付け手法

図1, 2, 3に帯幅, プロファイル, Fill-in減少のためのフローチャートを示す。図-1は自動化されたものではなく図式解法である。図-2はTree系を対象としたプロファイル減少アルゴリズム, 図-3は任意系を対象とするfill-in減少アルゴリズムである。帯幅, プロファイル減少法では、常に元の系のグラフを操えば良いが、一方fill-in減少法は各段階において取り扱う系の形状が異なる。ここで与えたアルゴリズムは各段階において最小fill-inを求める方法である。Fill-in減少法は必要な容量, 演算回数の最少化に直接的につながる。

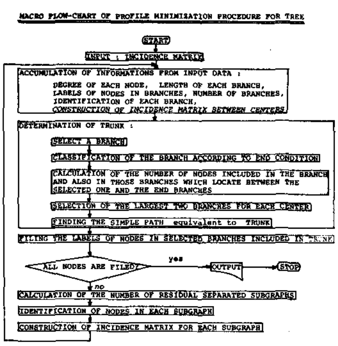


図-2. プロファイル減少法

## 4. あとがき

本研究では主としてGaussの消去法のグラフ理論的考察を行った。消去法はあきらかに有向グラフの概念と密接な関連をもち、実際に解かれている系は元の系と等価な、しかし外見的には異った有向グラフであることが指摘された。また消去法を基礎とするアルゴリズム（帯幅法, プロファイル法, スパース.マトリクス法）のためのLabeling Algorithmを与えた。

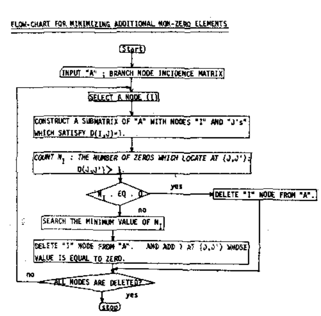


図-3. Fill-in 減少法


[参考文献] 1). I. Konishi et al, "Reducing the Bandwidth of Structural Stiffness Matrices", J. of Structural Mech., 4(2), 197-226, 1976, 2). フランク.ハラリイ, "グラフ理論", 共立出版, 昭46