構造解析の簡易化、省略化に関する基礎的研究

京都大学工学部　正会員　丹羽義次
京都大学工学部　正会員　渡辺英一
京都大学工学部　学生員　○西込昭宏

1. はじめに

構造解析を行なうにあたり、厳密解を求めるには多大な労力と計算時間を必要とするが実際にはある一定の精度が得られれば十分である場合が多い。そこで、解析上の工夫を行ないモデルの簡易化と計算の省略化を行なうことによって、計算時間と労力を短縮することができる。この研究では、板および補剛板を長方形板要素に分割し、曲げばねおよび捩ればねを考えることによって板の曲げおよび捩れと等価なものとして簡略化を行なうと同時に系の固有ベクトルおよび固有値を必要個数だけ求める。すなわち、縮小された空間において（すなわち部分空間において）固有ベクトルを求め、未知数をその空間のものに変換し、自由度を大幅に逓減する方法を提案したい。この板ばね要素法による方法[1]は、有限要素法における各節点での3自由度を、節点変位だけの1自由度にしたものであり、分割を多くとれば究極的にはF.D.M.と一致するものである。また解析を行なっていく上で、固有値問題および境界値問題が導かれるが、固有値を求める際にはBatheの開発した部分空間反復法を用いることによって簡略化を行なった。[2] 解析例としては、平板および補剛板に面内圧縮荷重が載荷したときの座屈解析、および面外等分布荷重が載荷したときの弾塑性解析を行なった。なおこの板ばね要素法の詳細は文献1)を参照されたい。

2. 座屈解析

補剛板に面内圧縮荷重が作用したときの座屈を考えると最小ポテンシャルエネルギーの原理式より、Uを歪エネルギー、Wを外力仕事、wを節点変位とすると

$$\left(\frac{\partial U_b^p}{\partial w_i}+\frac{\partial U_t^p}{\partial w_i}\right)+\left(\frac{\partial U_b^s}{\partial w_i}+\frac{\partial U_t^s}{\partial w_i}\right)=\left(\frac{\partial W^p}{\partial w_i}+\frac{\partial W^s}{\partial w_i}\right)\quad\cdots(1)$$

ここにpは板、sは補剛材を意味し、b.tはそれぞれ曲げ、捩れを意味する。

また
$$\left\{\frac{\partial U_b^p}{\partial w_i}\right\}=\frac{1}{6a^2}\left(\frac{b}{a}\right)D\,[B_x^p]\{w_i\}+\frac{1}{6b^2}\left(\frac{a}{b}\right)D[B_y^p]\{w_i\}$$
D：板の曲げ剛性
$$\left\{\frac{\partial U_t^p}{\partial w_i}\right\}=\frac{2D}{ab}[T^p]\{w_i\}$$
$$\left\{\frac{\partial U_b^s}{\partial w_i}\right\}=\frac{EI_s}{a^3}[B^s]\{w_i\}=\frac{n\gamma}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)D[B^s]\{w_i\}$$
$$\left\{\frac{\partial U_t^s}{\partial w_i}\right\}=\frac{GJ_s}{nab^2}[T^s]\{w_i\}=\frac{\phi(1-\nu)}{ab}[T^s]\{w_i\}$$
$$\left\{\frac{\partial W^p}{\partial w_i}\right\}=\frac{P}{6}\left(\frac{b}{a}\right)[W^p]\{w_i\}$$
$$\left\{\frac{\partial W^s}{\partial w_i}\right\}=\frac{P_s}{a}[W^s]\{w_i\}=n\delta P\left(\frac{b}{a}\right)[W^s]\{w_i\}$$

ここでたて横が$b\times a$で合計$m\times n$個の要素を用いれば、要素のたて横比をα、リブの面積比をδ、曲げ剛比をγ、捩れ剛比をϕとして次のように定義する。

$$\alpha=\frac{a}{b} \qquad \delta=\frac{A_s}{nbt} \qquad \gamma=\frac{EI_s}{nbD} \qquad \phi=\frac{GJ_s}{nbD(1-\nu)}$$

ただし　A_s：補剛材の断面積　t：板の厚さ　EI_s：曲げ剛性　GJ_s：捩れ剛性

ν：ポアソン比

(1)式の両辺を無次元化すると

$$\left[\left(\frac{1}{6}[B_x^p]+n\gamma[B^s]\right)+\frac{\alpha^4}{6}[B_y^p]+\alpha^2(1-\nu)\left(2[T^p]+\phi[T^s]\right)\right]\{W_i\}=\frac{Pa^2}{D}\left(\frac{1}{6}[W^p]+n\delta[W^s]\right)\{W_i\}$$

これはいはゆる $[K]\{x\}=\lambda[K_G]\{x\}$ というＭＫ型の固有値問題であって、最小の固有値によって座屈荷重が決定される。

この固有ベクトルを $[\Phi]$ とすれば

$$[\tilde{K}]=[\tilde{M}][\Lambda]$$

ここで　$[\tilde{K}]=[\Phi]^t[K][\Phi]$　　$[\tilde{M}]=[\Phi]^t[K_G][\Phi]$

これは Bathe の Subspace Iteration Method によって経済的に解かれる。

3. 弾塑性解析

板に面外等分布荷重が載荷している場合を考える。この板ばね要素法ではばねは完全弾塑性と仮定し、荷重の増加につれて各ばね要素の曲げモーメントおよび捩れモーメントを求めて、塑性判定条件に代入することによって、塑性に達するばね要素をみつけだす。このようにして順次、塑性に達したばね要素を求めていき、そのばね要素に対する要素マトリックスを全体の剛性マトリックスから差し引き、塑性マトリックスを代入する。そうして求められた全体の剛性マトリックスから荷重と変位との関係が導きだされる。以上の過程を式で次に示す。

$$[K]\{w\}=\{g\}$$

$[\Phi]$：Subspace における固有ベクトルとして $\{w\}=[\Phi]\{u\}$ とする。

ただし $[\Phi]$ としては例えば $[K]\{x\}=\lambda\{x\}$ の固有ベクトル

そのとき構成方程式はモーメントを $\{M\}$、曲率を $\{\phi\}$ とすると

$$\{dM\}=[D_p]\{d\phi\}$$

ただし　$$[D_p]=[D_e]-\frac{[D_e]\left\{\frac{\partial f}{\partial M}\right\}\underline{\frac{\partial f}{\partial M}}[D_e]}{\underline{\frac{\partial f}{\partial M}}[D_e]\left\{\frac{\partial f}{\partial M}\right\}}$$

これをつりあい式に代入すれば

$$\left([K]+[\Phi]^t[B]^t\left([D_p]-[D_e]\right)[B][\Phi]\right)\{du\}=[\Phi]^t\{g\}$$

第１項は対角行列で第２項は塑性変形の影響を示し、場所の関数である。

この左辺のマトリックスの逆行列は容易に求まる。

なおこの結果は当日スライドで発表する予定である。

4. 参考文献

1) 山田、渡辺、横塚：昭和51年度関西支部年講 I-49

2) Bathe, K.J. & E.L. Wilson : Numerical Methods in Finite Element Analysis Prentice-Hall Inc., 1976.