

線形粘弾性基礎上の長方形板の曲げ解析

大阪市工務部 正員 園田 恵一郎

" " 小林 祐修

" " 〇 学生員 石尾 年光

1. まえがき 既にわかれわかれは線形粘弾性基礎上の種々の境界条件をもつ四板の解式¹⁾と四板の振動より導かれる固有関数を用いて求め、静荷重の下での四板の等動的時間的变化を明らかにした。本報告は矩形板、無限帯板について同様に固有関数を用いて解析したものを示す。

2. 解式について ここでは矩形板は相対二重単純支持、他の二重に任意の境界条件をもつ場合を取り扱い、無限帯板は両縁に任意の境界条件をもつ場合を取り扱う。従って、固有関数展開は矩形板については Levy タイプの級数表示式、無限帯板についてはフーリエ積分表示式となる。一例として二重単純支持、二重自由の矩形板(図1)、両縁自由の無限帯板(図2)の固有関数、振動数方程式を示す。

図1 矩形板

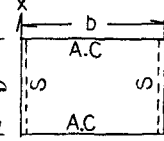
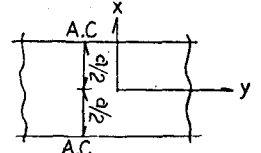


図2 無限帯板



A.C.: Arbitrary Condition S: Simply support

矩 形 板

無 限 帯 板

1) $\alpha_1 m_1 > (\pi b/2) \alpha_2$ のとき $F_{m11}(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_1 n}{b} x + \sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} x}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\cosh \frac{\alpha_1 n}{b} \Lambda_1 - \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_2)} \cdot \frac{\Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} x - \Lambda_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} x}{\Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} \Lambda_1 - \Lambda_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} \Lambda_2} \quad (1.a)$ $\frac{\sinh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1 \cdot \sinh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2}{\cosh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1 \cdot \cosh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2 - 1} + \frac{2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 n}{b} \sinh \frac{\alpha_2 n}{b}}{\Lambda_2^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} \Lambda_1 - \Lambda_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} \Lambda_2} = 0 \quad (2.a)$ これより、$\Lambda_1 = \sqrt{b^2 \alpha_1^2 + m^2 \pi^2}$, $\Lambda_2 = \sqrt{b^2 \alpha_2^2 + m^2 \pi^2}$ $\sum_{m=1}^{\infty} = \Lambda_1^2 - m^2 \pi^2 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} = \Lambda_2^2 + m^2 \pi^2 > 0$ $\forall: \alpha_1, \alpha_2 > 0$	1) $\alpha_2 > \beta^2 \alpha_1$ のとき $F_{m1}(x) = \cosh \Lambda_2 x + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_2}{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_1} \cdot \cosh \Lambda_1 x \quad (1.b)$ $\frac{\Lambda_1 \tanh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1}{\Lambda_2 \tanh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2} + \frac{\Lambda_1^2}{\delta^2} = 0 \quad (2.b)$ これより、$\Lambda_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta^2}$, $\Lambda_2 = \sqrt{\alpha_2^2 - \beta^2}$ $\sum_{m=1}^{\infty} = \Lambda_1^2 - \beta^2 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} = \Lambda_2^2 + \beta^2 > 0$ $\forall: \alpha_1, \alpha_2 > 0$
2) $\alpha_1 m_1 < (\pi b/2) \alpha_2$ のとき $F_{m2}(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_1 n}{b} x - \sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} x}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\cosh \frac{\alpha_1 n}{b} \Lambda_1 - \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_2)} \cdot \frac{\Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} x - \Lambda_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} x}{\Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} \Lambda_1 - \Lambda_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} \Lambda_2} \quad (3.a)$ $\frac{\sinh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1 \cdot \sinh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2}{\cosh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1 \cdot \cosh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2 - 1} - \frac{2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 n}{b} \sinh \frac{\alpha_2 n}{b}}{\Lambda_2^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_1 m}{b} \Lambda_1 - \Lambda_1^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sinh \frac{\alpha_2 m}{b} \Lambda_2} = 0 \quad (4.a)$ これより、$\Lambda_1 = \sqrt{m^2 \pi^2 + b^2 \alpha_1^2}$, $\Lambda_2 = \sqrt{m^2 \pi^2 - b^2 \alpha_2^2}$ $\sum_{m=1}^{\infty} = \Lambda_1^2 - m^2 \pi^2 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} = \Lambda_2^2 - m^2 \pi^2 > 0$	2) $\alpha_2 < \beta^2 \alpha_1$ のとき $F_{m2}(x) = \cosh \Lambda_2 x - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_2}{\sum_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{\alpha_2 n}{b} \Lambda_1} \cdot \cosh \Lambda_1 x \quad (3.b)$ $\frac{\Lambda_1 \tanh \frac{\alpha_1}{b} \Lambda_1}{\Lambda_2 \tanh \frac{\alpha_2}{b} \Lambda_2} - \frac{\Lambda_1^2}{\delta^2} = 0 \quad (4.b)$ これより、$\Lambda_1 = \sqrt{\beta^2 + \alpha_1^2}$, $\Lambda_2 = \sqrt{\beta^2 - \alpha_2^2}$ $\sum_{m=1}^{\infty} = \Lambda_1^2 - \beta^2 > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} = \Lambda_2^2 - \beta^2 > 0$

よりの固有関数を用いて Winkler 基礎上の矩形板、無限帯板のたわみは式(5)のように表わされる。ここに β はバネ係数である。

$W = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{imn}}{\delta \alpha_i^2 + \beta} \cdot F_{m1}(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (5.a)$ $g_{imn} = \int_0^a \int_0^b g(x, y) \cdot F_{m1}(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy / \frac{b}{2} \int_0^a F_{m1}^2(x) \, dx$	$W = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{g_{im}}{\delta \alpha_i^2 + \beta} \cdot F_{m1}(\beta, x) \cosh \beta y \, d\beta \quad (5.b)$ $g_{im} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{b}{2}} g(x, y) \cdot F_{m1}(\beta, x) \cosh \beta y \, dy \, dx / \int_0^{\frac{b}{2}} F_{m1}^2(x) \, dx$
--	---

対応原理」に従えば粘弾性解に Laplace 変換を施した式は、弾性解(5.a), (5.b)に $g_{\text{uni}} \rightarrow \bar{g}_{\text{uni}}(s)$, $b \rightarrow \bar{b}(s)$ と b に α に置き換えて、こゝらを式(5.a), (5.b)に代入して逆変換すれば所望の解が求められる。荷重が時間依存しない場合で、基礎は Kelvin モデルで表わされる場合は、 $\bar{g}_{\text{uni}}(s) = g_{\text{uni}}/s$, $\bar{b}(s) = b(1 + \tau s)$ でありこれを代入したときの解式を示せば次のようになる。

矩形板:

$$W = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\text{uni}}}{\alpha_i^4 + 1/k^4} \cdot F_{\text{uni}}(x) \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[- (1 + (\alpha_{\text{uni}} \cdot k)^4)^{1/4} \right] \right\}, \quad K^4 = D/b \quad (6.a)$$

無限帯板:

$$W = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^b \frac{g_{\text{uni}}}{\alpha_i^4 + 1/k^4} \cdot F_{\text{uni}}(x) \cdot \cos \beta y \, d\beta \cdot \left\{ 1 - \exp \left[- (1 + (\alpha_{\text{uni}} \cdot k)^4)^{1/4} \right] \right\}, \quad K^4 = D/b \quad (6.b)$$

他のモデルの場合についても同様にして求めることができる。ところで式(6.b)の無限積分を解析的に求めるためには、固有値 α_{uni} を β の関数表示する必要があるが式(2.b)と(4.b)よりこの関数形を決定することは非常に困難である。したがって、式(6.b)を Simpson 公式により数値積分することと考える。そうすれば β のきり幅 $\Delta\beta$ の離散的变化に対する α_{uni} を数値的に求めることと十分である。

3. 数値計算例

一例として Kelvin 基礎工の二重単純支持二重固定の矩形板($a=b$ と b/k)、無限固定の無限帯板に集中荷重が作用する場合につき計算を行う。その a/k を図3, 図4に示した。 $a/k = a \cdot \sqrt{D/b} = 3.0$ とした。 $t/t_0 = 0$ において t は0であり以後ゆるやかに収束する。最終状態($t/t_0 = \infty$)は Winkler 基礎工の t の値になる。また無限帯板では板幅の $1/2$ だけ離れたところではほぼ0となる。

他の基礎モデルの場合や異なる境界条件をもつ矩形板、無限帯板に関する数値計算例については当日に発表する予定である。

4. 参考文献

- 1) 岡田・小林・石尾: 矩形粘弾性地盤工の解析、昭和48年度土木学会論文発表会報告集
- 2) 浅谷・小泉・佐田: 集中荷重作用する二重固定の無限帯板、機械学会論文集329(1974)

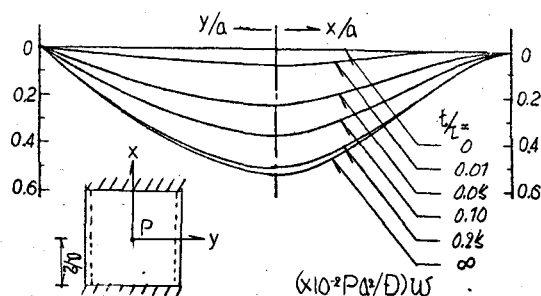


図3 Kelvin基礎上の矩形板のたわみ

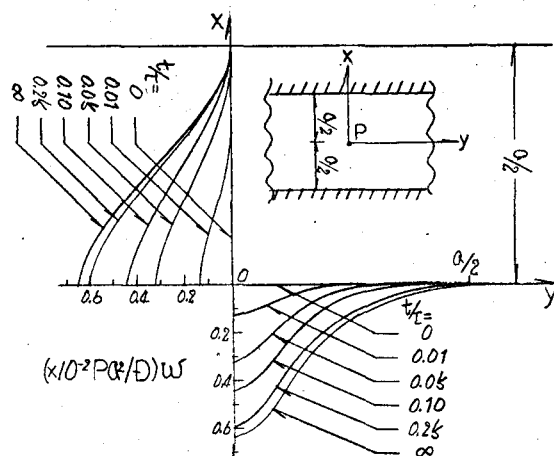


図4 Kelvin基礎上の無限帯板のたわみ