弾塑性問題の積分方程式による解法

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　福井卓雄
京都大学大学院　学生員 ○仁木清貴

1. はじめに

積分方程式による弾性問題の解法はすでにいくつかの成果があがっているが、積分方程式による解法の特徴は，初めに境界上での未知量（変位が与えられたときは表面力あるいはその逆）を求めてしまい，既知となった境界上での表面力と変位により内部の変位，ひずみ，応力を求めようとするものである。これは領域内での要素分割を必要とせず，また一度境界上での値を求めてしまえば必要とする領域内の任意の点における変位，ひずみ，応力などを簡単に計算できることにある。本研究ではこの手法を弾塑性問題に適用することにある。実際のモデルとしてはトンネル周辺のゆるみ領域の広がりを求めることである。この際，塑性化しそうな領域に対してはあらかじめ要素分割を必要とする。これは塑性ひずみの影響を考慮しなければならないため，やむをえないことである。しかし，一度塑性化した領域を求めてしまえば，弾性問題の場合と同様に領域内の任意点の変位，ひずみ，応力などを求めることはたやすい。これがこの解析法の特徴である。

2. 弾塑性問題の積分方程式による定式化

三次元空間内の等方均質な物体に対して次のような仮定をおく。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \qquad (1) \qquad\qquad \dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} + P_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{p}_{kl} \qquad (3) \qquad\qquad \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (4)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}$：ひずみ増分　　$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$：弾性ひずみ増分　　$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$：塑性ひずみ増分

$\dot{u}_i$：変位増分　　$\dot{\sigma}_{ij}$：応力増分

このとき弾塑性流れに対するナビアーの式は以下のようになる。

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{j,ij} + (\bar{P}_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{p}_{kl})_{,j} = 0 \qquad (5)$$

すなわち塑性歪増分は物体力と同じような働きを演じる。弾性ひずみ増分は次式で表わせる。

$$2\mu\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \nu\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}/(1+\nu) \qquad (6)$$

ν：ポアソン比　　μ：せん断弾性係数

領域内の2点 $P(x_i)$，$Q(y_i)$ が与えられたとき Q点の k方向に f_k の集中荷重が作用したときの P点の i 方向の変位は，基本特異解 U_{ki} を使って　$u_i = U_{ki} f_k$　(7)　と表わせる。但し，二度くり返される添字については総和規約を適用する。本研究においては平面ひずみ問題を考えており　U_{ki} は

$$U_{ki}(P,Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(-3+4\nu)\delta_{ki}\log r + r_{,k}r_{,i}\right] \qquad (8)$$

$$r = r(P,Q) = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)} \qquad\qquad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{r}$$

である。ここで等方弾性な物質に対するフックの法則を適用して，変位 (7) に対応する応力を求めると　$\sigma_{ij} = Z_{kij} f_k$　(9)

但し $\Sigma_{kij}(p,q)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}-\delta_{ik}r_{,j}-\delta_{jk}r_{,i})-2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]$ (10)

また、点 $p(x_i)$ まわりの閉曲線上における外向き単位法線ベクトルの成分を n_j とすると、その線上での表面力 t_i はコーシーの式を使って $t_i=\sigma_{ij}n_j$ (11) と表わせる。

さらに (9) 式を使って $T_{ki}=\Sigma_{kij}n_j$ (12) とおくと (11) 式は $t_i=T_{ki}f_k$ (13)

次にベティの相反定理と (5), (10) より

$$\int_{D-D_0}\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^e_{ij}\,ds=\int_{D-D_0}\varepsilon^*_{ij}\dot{\sigma}_{ij}\,dS \qquad (14)$$

ここで D_0 は点 $p(x_i)$ を中心とする半径 ρ の円領域である。 さらに (1) 式を使って変形すると、

$$\int_{D-D_0}\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,ds-\int_{D-D_0}\sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\,dS=\int_{D-D_0}\varepsilon^*_{ij}\dot{\sigma}_{ij}\,dS \qquad (15)$$

(7), (9), (11) を使い $\rho\to 0$ のとすると

$$\dot{u}_k(p)+\int_{\partial D}T_{ki}(p,Q)\dot{u}_i(Q)\,ds_Q=\int_{\partial D}U_{ki}(p,Q)\dot{t}_i(Q)\,ds_Q+\int_D\Sigma_{kij}(p,q)\dot{\varepsilon}^p_{ij}(q)\,dS_q \qquad (16)$$

また p が境界上にある時は

$$\frac{1}{2}\dot{u}_k(P)+\int_{\partial D}T_{ki}(P,Q)\dot{u}_i(Q)\,ds_Q=\int_{\partial D}U_{ki}(P,Q)\dot{t}_i(Q)\,ds_Q+\int_D\Sigma_{kij}(p,Q)\dot{\varepsilon}^p_{ij}(q)\,dS_q \qquad (17)$$

(3) 式をひずみで定式化し

$$\dot{\varepsilon}_{kl}(p)+\int_{\partial D}\Lambda^i_{kl}(p,Q)\dot{u}_i(Q)\,ds_Q=\int_{\partial D}\Gamma^i_{kl}(p,Q)\dot{t}_i(Q)\,ds_Q+\int_D\Phi^{ij}_{kl}(p,q)\dot{\varepsilon}^p_{ij}(q)\,dS_q \qquad (18)$$

$$\Lambda^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}T_{ki}+\frac{\partial}{\partial x_k}T_{li}\right),\quad \Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}U_{ki}+\frac{\partial}{\partial x_k}U_{li}\right),\quad \Phi^{ij}_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\Sigma_{kij}+\frac{\partial}{\partial x_k}\Sigma_{lij}\right)$$

3. 解法の説明

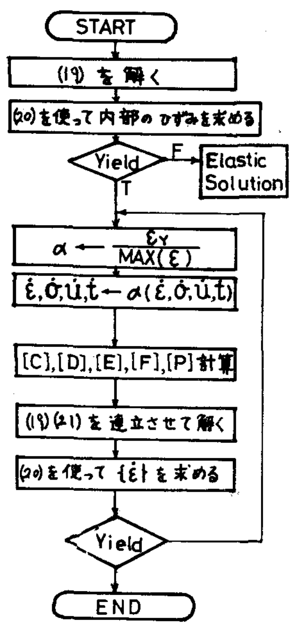
上に述べた積分方程式を解くについて、境界をNヶに分割する。この分割した区間は直線で近似するものとする。また塑性化しそうな領域に対してはあらかじめ要素に分割しておく。そうすると (17), (18) 式は次のような連立方程式となる。

$$\left(\frac{1}{2}[I]+[A]\right)\{\dot{u}\}=[B]\{\dot{t}\}+[C]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (19)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}+[G]\{\dot{u}\}=[H]\{\dot{t}\}+[P]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (20)$$

さらに (20) 式の $\{\dot{\varepsilon}\}$ を (4) 式を使って $\{\dot{\varepsilon}^p\}$ に直すと

$$[D]\{\dot{u}\}=[E]\{\dot{t}\}+[F]\{\dot{\varepsilon}^p\} \qquad (21)$$



今仮りに境界上で表面力が与えられたとすると (19) 式において未知なものは $\{\dot{u}\}$ だけとなり $\{\dot{u}\}$ は求まる。（最初の段階では $\{\dot{\varepsilon}^p\}=0$ ）

次に (20) 式を使って $\{\dot{\varepsilon}\}$ を求め降伏しているかどうか判断する。

降伏条件を最大に越えたものがちょうど降伏条件を満たすように引き下げ率 α を求め、変位、ひずみ、応力、表面力を引き下げる。この際、ある許容値を与えてその範囲におさまるものは同時に降伏したとみなす。以下は塑性化した領域が現われるので増分計算を行なう。まず塑性化した領域に対してその影響係数[C],[D],[E],[F][P]を求める。次に面力の増分を適当に与えて (19), (21) 式を連立させて解き、求めた $\{\dot{u}\}\{\dot{\varepsilon}^p\}$ より (20) 式を使って $\{\dot{\varepsilon}\}$ を求める。以下この計算をくり返す。

4. おわりに

計算は現在実行中であり、演算結果および考察は当日とりまとめて発表する予定である。