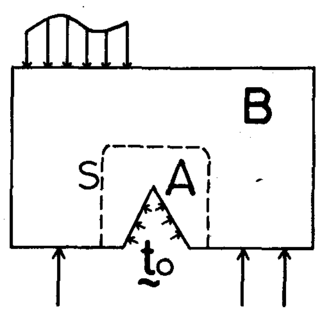
積分方程式を用いた有限要素の構成およびその応用

京都大学工学部　正会員　丹羽 義次
〃　〃　〃　福井 卓雄
四国電力(株)　〃　○末沢 等

1. はじめに

近年，積分方程式によって境界値問題，クラック問題などに適用が試みられ，かなりの成果が得られるようになってきた。この積分方程式法は，線形境界値問題に対して一般的な方法であり，特に均一の領域に対しては精度，計算時間などの点ですぐれている。

一方，有限要素法による構造解析にはめざましいものがあり，多方面への適用が試みられている。これら２つの方法には，それぞれ，一長一短がある。そこで本研究では，これらの方法による解析例を示し，精度および計算時間などの点について，二次元等方弾性体の静的境界値問題で比較，検討を行なう。さらに，連続体の有限要素解析過程において，Super-element と呼ばれる特殊な要素を積分方程式法を用いて導入することにより，有限要素法の改良を試みるものである。



図－1

いま簡単のために図１のような領域に何らかの外力が作用している場合の弾塑性解析をすることを考える。これを通常の有限要素法で解析する場合には，全領域を要素に分割する必要があるが，このような問題では，材料特性が変化するのは塑性化した一部分の領域だけであり、大部分は均質な材料特性を保持したままである。ここで有限要素法は，構造物とか連続体を有限個の要素に分割し、それぞれの要素の集合体として構成される構造物ないし連続体の近似モデルの挙動を解析する手法である。従って必要な部分はできるだけ細かくし，集合体としての特性を活用すべきであるし、逆に材料性質の変わらない部分では，できるだけ大まかな分割で済ませた方が効率が良いことは明らかである。そこで，図１のような問題においては，均質な材料特性を保持する部分Ｂをひとまとめにした Super-element を導入し，その要素特性を積分方程式を用いて求め，さらに応力あるいは変位の詳細な挙動などを求めたい部分Ａについてはできるだけ細かく分割して，解析することを考える。

2. 定式化

ここでは，積分方程式法によって要素の特性を求める方法を説明するために，例として二次元等方弾性体の静的境界値問題について考えることにする。

領域Ｄおよびその境界Ｓにおいて次のような境界値問題が与えられているとする。

$$\mathbb{L}_{ij} u_j = \mu \left[u_{i,jj} + \frac{2}{K-1} u_{j,ij} \right] = -F_i \quad \text{in } D \qquad \text{——— (1)}$$

$$t_i = \mathbb{T}^n_{ij} u_j = \mu\left[\frac{\partial u_i}{\partial n} + n_j u_{j,i} - \frac{\kappa-3}{\kappa-1} n_i u_{j,j}\right] = -f_i \quad \text{on } S_1 \subset S \text{ —(2)}$$

$$u_i = g_i \quad \text{on } S_2 = S - S_1 \text{ —(3)}$$

ここに，u_i，F_i，t_iは変位，物体力，境界応力，$\mathbb{L}_{ij}$，$\mathbb{T}^n_{ij}$は偏微分作用素，n_iは境界上の単位法線ベクトル，μはせん断弾性定数，κは，νをポアソン比とすれば，平面応力状態のとき$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$，平面ひずみ状態のとき$\kappa = 3-4\nu$，$f_i$，$g_i$は与えられたベクトル関数であり，添字については総和規約を適用する。

このとき，問題は境界上の未知変位および未知応力に関する次の*Somigliana*の積分方程式に帰着することができる。　境界上の2点を$P(x_0)$，$Q(y)$　$P, Q \in S$とすれば，

$$\frac{1}{2}u_i(x_0) = -\int_D G^{(k)}_i(x_0;y)\cdot F_k(y)\,dV_y + \int_S \left[G^{(k)}_i(x_0;y)\,t_k(y) - u_k(y)\,G^{(k)}_{Ii}(x_0;y)\right] dS_y \text{ — (4)}$$

ここに，$G^{(k)}_i(x_0;y)$は基本特異解である。　　$r^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i)$

$$G^{(k)}_i(x_0;y) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)}\left(\kappa\,\delta_{ik}\log r - r_{,i}\,r_{,k}\right),\quad G^{(k)}_{Ii}(x_0;y) = \mathbb{T}^n_{kj}\,G^{(j)}_i(x_0;y) \text{ — (5)}$$

いま，図2のようなSuper-elementを考え，簡単のため，要素内には物体力はなく，式(4)の右辺第一項の境界応力は節点上の集中力で代表して表わすとする。　そこで境界SをN個の区間，$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N$に分割し，その各区間で変位，$u_k(y_1), u_k(y_2), \cdots, u_k(y_N)$は一定であるとし，積分を適当に評価すると，

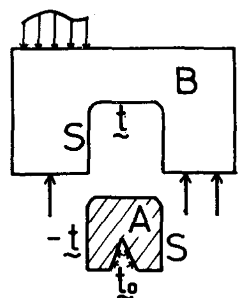


図-2

$$\sum_{L=1}^{N} G^{(k)}_i(y_K;y_L)\cdot t_k(y_L)\cdot\Delta(y_L)$$
$$= \sum_{M=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\delta_{ik} + G^{(k)}_{Ii}(y_K;y_M)\cdot\Delta(y_M)\right]\cdot u_k(y_M) \text{ —— (6)}$$
$$(k=1,2;\ l=1,2;\ i=1,2)$$

さらに式(6)を，$2N$個の未知数$u_k(y_1), u_k(y_2), \cdots, u_k(y_N)$について解けば，要素の剛性が得られる。

$$t_k(y_K) = \sum_{L=1}^{N} K^{L}_{kl}(y_K)\cdot u_l(y_L) \text{ —— (7)}$$

以下，簡単のためマトリックスにより表示する。　つりあい式は次のようにかける。

$$[K]\{u\} = \{t\} \quad \text{in A and S —(8)},\qquad [K_0]\{u_0\} + \{t_0\} = \{t'\} \quad \text{in B and S —— (9)}$$

ここに$[K]$はA内の有限要素法による剛性マトリックス，$[K_0]$は式(7)でいうところのBの要素剛性マトリックス，$\{t\}$，$\{t'\}$はAおよびB内の応力ベクトル，$\{t_0\}$はA内の実境界上の応力ベクトルである。　AとSuper-element Bとの境界，S上での応力ベクトルのつり合いより，

$\{t'\} = -\{t\}$　on S　，したがって式(8)，(9)より，

$[K]\{u\} + [K_0]\{u_0\} + \{t_0\} = 0$　　ここで，$[K_0]\{u_0\}$を節点番号順に並べかえ，境界S上の節点について有限要素法の剛性マトリックス$[K]$と重ね合わせることができるようにおきかえたものを$\left[\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ K_0^*\end{smallmatrix}\right]\{u\}$とすれば，

$$\left\{[K] + \left[\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ K_0^*\end{smallmatrix}\right]\right\}\cdot\{u\} = -\{t_0\},\quad \therefore\quad \{u\} = -\left\{[K] + \left[\begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ K_0^*\end{smallmatrix}\right]\right\}^{-1}\cdot\{t_0\} \text{ —— (10)}$$

いま境界上で$\{t_0\}$が与えられれば，式(10)によって内部変位u_iを求めることができる。

<u>3. おわりに</u>　現在計算中であり，結果の詳細，精度および計算時間の検討，Super-elementを用いた計算結果，従来の有限要素法との比較などについては当日発表する予定である。