波動問題の積分方程式による解法

京都大学工学部　正　丹羽義次　正　福井卓雄
大豊建設(株)　正　○加藤靖也

1．はじめに

波動問題の中でも、進行波の過渡的な応答を知る事は、物理学的にも工学的にも非常に意義深いものである。しかし一般的に、この問題は、媒体の不均質性や不連続性，障害物の存在などのため解析は非常に困難なものとなる。また、波の反射、回折、屈折などの複雑な過程を含んでいるので数学的に解析することは、非常にむづかしい。したがって、数値解析は、これらの問題を含む波動方程式の解を求める有用な手段となってくる。

本研究では、一例として、一様な半無限弾性体中の任意な形状をした空洞，もしくは、異質埋没物にSH波が入射した場合の過渡応答を、二次元波動問題として解析する。

解析の手法としては、波動の基礎方程式より導き出した積分方程式を用い数値解析を試みた。特にこの解析法においては、二次元波動問題を等価な三次元波動問題におきかえて数値解析をわかりやすく、簡明にしている。

2．波動問題の基礎方程式

三次元弾性体中における Navier の式は、物体力 $F_i=0$ とすると次のようになる。

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\, u_{j,ij} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (i=1,2,3) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに u_i，u_j は変位，G はせん断弾性係数，ρ は密度，ν はポアソン比を表わす。問題を簡単にするためにSH波のみを考え、x_1-x_2 平面の二次元波動問題と考えると、(1)式は、次のようになる。

$$c^2 u_{,ii} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (i=1,2) \qquad \cdots\cdots(2)$$

u は変位 u_3 を，c は $\sqrt{G/\rho}$ を表わす。

3．波動問題の積分方程式への定式化

(2)式は、空間に対して二次元の方程式である。しかし二次元波動方程式の基本解は、非常に複雑であるから、これを等価な三次元波動問題として解析する。そのために、二次元の境界及び入射波を、第三番目の x_3 軸に平行に、立体的に拡張すればよい。つまり x_1-x_2 平面に含まれていた境界 S を、S を底面としたシリンダーの側面 S_0 に拡張する。

(2)式を三次元波動方程式と考えて、Kirchhoff の遅延ポテンシャルを導入し（二次元波動方程式には適用できない。）Green の公式を直接使って積分方程式を導く。

原点からの距離を r とし，$\psi(x_i,t) = u(x_i, t-r/c)$ と定義すると、(2)式は、

$$\frac{1}{r}\psi_{,ii} + \frac{2}{c}\left(\frac{x_i}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{,i} = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。

(3)式に、Green の公式を適用し、また、任意の量 Ω の遅延ポテンシャルを $[\Omega]=\Omega(x_i,t-\frac{r}{c})$ と定義し積分方程式を導き、その式を無次元化すると，次のようになる。

$$\in U = U_w + \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right] + \frac{1}{r^2}[U] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\} dS \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

∈はパラメーターで、∈＝１のときは領域内、$\in = \frac{1}{2}$のときは境界上，∈＝０のときは領域内の値を表す。U_wは入射波の変位である。

4．数値解析

積分方程式(4)に添字をつけて書くと

$$\in U(F,t) = U_w(F,t) + \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial U(F_0,t_0)}{\partial n_0} + \left\{\frac{U(F_0,t_0)}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U(F_0,t_0)}{\partial t_0}\right\}\frac{\partial R}{\partial n_0}\right]_{t_0=t-R} dS_0 \cdots (5)$$

となる。$U(F,t)$は領域内の変位，$U_w(F,t)$は入射波の変位，S_0は境界，Fは領域内の点，F_0は積分変数，$R=|F-F_0|$，tは時間，t_0は遅延時間，n_0はS_0の外向き法線ベクトルを表わす。(5)式からわかるように、tを一定と仮定すると、t_0が０からtまで変化する間に、$R(|F-F_0|)$はtから０まで変化する。($\because t_0=t-R$)　したがって点Fの時間tにおける変位$U(F,t)$は点Fを中心とし半径tの球と境界S_0との交線で囲まれたS_0上の領域について積分すれば求まる。

x_1-x_2平面内の境界と時間tに対して差分を取り(5)式を書き直すと

$$\in U(I,N) = U_w(I,N) + \frac{1}{4\pi}\sum_{J=1}^{MAX}\sum_{K=1}^{N}\Big(\alpha(I,J,K)\frac{\partial U}{\partial n_0}(J,N-K+1) + \beta(I,J,K)\,U(J,N-K+1)$$
$$+\gamma(I,J,K)\cdot\frac{1}{2\cdot\Delta t}\big\{3U(J,N-K+1) - 4U(J,N-K) + U(J,N-K-1)\big\}\Big) \quad \cdots\cdots (6)$$

時間微分は、二次の項までの後退時間差分で表わした。ＭＡＸ；空間区間分割数，Δt；時間ステップ間隔．

5．解析結果

境界の形状は，円形及び馬てい形を用いた。　入射波としては，三角形波，段波，Sin波の３つを選び解析した。下図は，境界上での変位の法線微分$\frac{\partial U}{\partial n}=0$（自由な境界）の条件の下で円形の境界に三角形波が入射した場合の境界上の変位を求めたものである。式の無次元化には、入射波の最大変位と速度を用いた。入射波は最大変位１，速度１とした。

6　おわりに

段波，Sin波による解析及び，馬てい形での解析，その他、精度などについては当日発表する予定である。