

積分方程式法の精度について

京都大学工学部 小林昭一
京都大学大学院 ○吉田幸司

1. はじめに

最近積分方程式を用いて境界値問題を解く方法が注目され、いろいろな問題に適用され始めている。積分方程式自体は、場の微分方程式を境界条件の下で解いた解ではあるが、陽な解ではなく、また一般に解析的に陽な解を求めることは困難であるので、数値的に解かれるのが普通である。数値解法としては、大きく分けて、i) 仮想境界を用いる方法と、ii) 実境界を用いる方法とがある。いずれも、数値計算上は、積分を区間積分の和として表わすことになるので、積分区間の取り方、その数などが解析精度を支配すると思われる。

この研究は、このような見地から、線形弾性境界値問題、特に一様応力場での円孔および楕円孔の応力集中問題を例に、数値シミュレーションを行ない、積分方程式の解の精度について検討を加えたものである。

2. 積分方程式法

i) 弾性境界値問題の積分表示；孔のある無限板が無限遠から一様な応力を受けているものとする。(図-1) この問題は、一重層ポテンシャル $\varphi_k(y)$ を導入すると次のように定式化される。求める解を式(1)の形とすれば、境界条件が式(2)の形で与えられる外部第2種境界値問題は積分方程式(3)で与えられる。

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} T_{ik}^{(0)}(x, y) \varphi_k(y) dy \quad \text{----- (1)}$$

$$\left| \frac{1}{T_{ij}} u_j(x) \right|_e = g_i(x) \quad \text{----- (2)}$$

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} \varphi_i(x) + \int_{\Gamma} T_{ii}^{(0)}(x, y) \varphi_i(y) dy \quad \text{----- (3)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \eta_j \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \eta_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $u_i(x)$ は x での変位、 $T_{ik}^{(0)}(x, y)$ は基本特異解、 $T_{ii}^{(0)}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_{ik}^{(0)}(x, y)$ である。

ii) 仮想境界法；図-1のように仮想境界を考え、この上に働く密度を適当に選ぶことにより、境界上の与えられた条件を満足するようにする。この方法では、適当な区間に分割して数値積分すると、次式を解くことに帰着される。

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^N T_{11}^{(0)}(x, y_j) \varphi_1(y_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^N T_{12}^{(0)}(x, y_j) \varphi_2(y_j) \Delta h_j \quad \text{----- (5)}$$

$$g_2(x) = \sum_{j=1}^N T_{21}^{(0)}(x, y_j) \varphi_1(y_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^N T_{22}^{(0)}(x, y_j) \varphi_2(y_j) \Delta h_j$$

iii) 実境界法；実境界上での積分方程式を解く。適当な区間に分割すると、次式を解くことに帰着される。

$$g_1(x) = -\frac{1}{2} \varphi_1(x) + \sum_{j=1}^N T_{11}^{(0)}(x, y_j) \varphi_1(y_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^N T_{12}^{(0)}(x, y_j) \varphi_2(y_j) \Delta h_j \quad \text{----- (6)}$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{2} \varphi_2(x) + \sum_{j=1}^N T_{21}^{(0)}(x, y_j) \varphi_1(y_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^N T_{22}^{(0)}(x, y_j) \varphi_2(y_j) \Delta h_j$$

なお、この場合では、区間内の密度分布は、一定および直線的とれる。

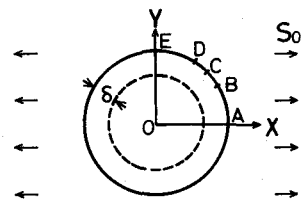


図-1

3. 数値例

A) 仮想境界

i) 円孔; 実境界より

S 離れた同心円と仮想境界とした。区間長と S との比を ξ とし、精度を半対数紙上に描いたものが、図-2, 図-3 である。

ii) 楕円孔; 実境界楕円と焦点が一致する楕円を仮想境界とした。(表-1)

B) 実境界

i) 円孔; 積分法を 6

点とるガウス積分法と 12 点とるガウス積分法の二通りで行なってみた。(表-2, 表-3, 表-4)

ii) 楕円孔; 区間長を同じくした分割法と、離心角を利用して分割した方法の二通りを行なった。前者の場合、区別するため κ の印をつけておいた。(表-5)

6 and 12 points gauss integral (Stress)

	N=20	N=40	N=60	Analytical
A (6)	-1.162	-0.936	-0.841	-1.0000
(12)	-1.296	-1.154	-1.016	
B (6)			0.125	0.0000
(12)			0.064	
C (6)		1.372		1.0000
(12)		1.257		
D (6)			2.169	2.0000
(12)			2.065	
E (6)	2.994	2.984	2.991	3.0000
(12)	3.004	3.003	2.997	

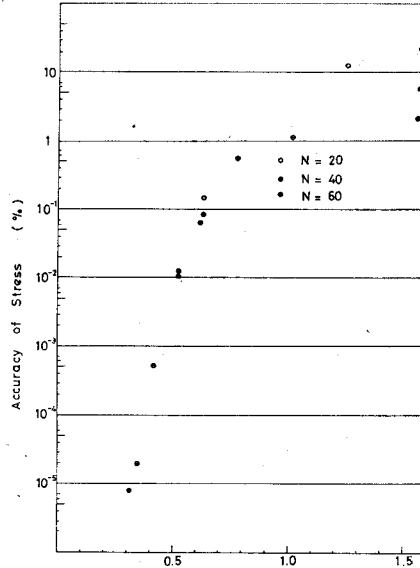
表-2

12 points gauss integral (Displacement)

$E=1.0, \nu=0.2$

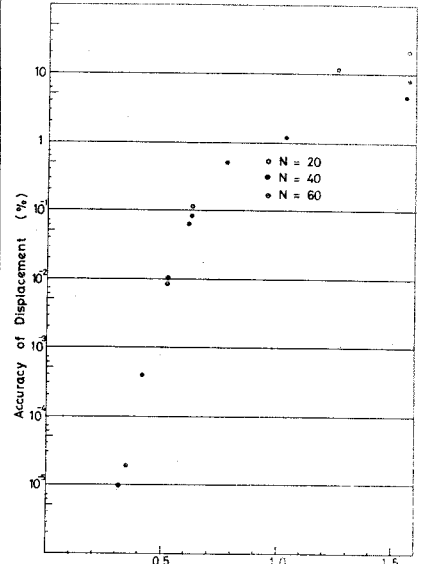
	N=20	N=40	N=60	Analytical
A κ	2.956	2.915	2.904	2.8800
$\bar{\kappa}$	3.000	0.000	0.000	0.0000
B κ			2.519	2.4942
$\bar{\kappa}$			-0.492	-0.4800
C κ		2.072		2.0365
$\bar{\kappa}$		-0.700		-0.6788
D κ			1.489	1.4400
$\bar{\kappa}$			-0.845	-0.8314
E κ	0.000	0.000	0.000	0.0000
$\bar{\kappa}$	-0.999	-0.975	0.970	-0.9600

表-4



$\xi = 2\pi a/N\delta$

図-2



$\xi = 2\pi a/N\delta$

図-3

$b/a = 5.0$

Analytical $\delta_A = -1.000$ $\delta_B = 11.000$ $u_A = 10.560$ $u_B = -4.800$

N	δ_A, δ_B	δ_A, δ_B	Error (%)	u_A, u_B	Error (%)
40	0.900 0.100	0.939 1.850 (1.355)	-2.963 13.040 18.55	9.258 -5.816	12.33 21.17
60	0.900 0.100	0.581 1.080 (0.831)	-0.444 7.408 14.47	10.335 -4.708	2.13 1.92
80	0.950 0.100	0.485 0.741 (0.713)	-0.898 10.869 1.19	10.523 4.801	0.35 9.021

表-1

6 points gauss integral (Displacement)

$E=1.0, \nu=0.2$

	N=20	N=40	N=60	Analytical
A κ	2.957	2.925	2.911	2.8800
$\bar{\kappa}$	0.000	0.000	0.000	0.0000
B κ			2.525	2.4942
$\bar{\kappa}$			-0.493	-0.4800
C κ		2.079		2.0365
$\bar{\kappa}$		-0.701		-0.6788
D κ			1.459	1.4400
$\bar{\kappa}$			-0.845	-0.8314
E κ	0.000	0.000	0.000	0.0000
$\bar{\kappa}$	-1.001	-0.976	-0.971	-0.9600

表-3

$b/a = 5.0$

$E=1.0, \nu=0.2$

N	δ_A	δ_B	u_A	u_B
40 κ	0.208	9.723	10.870	-4.416
$\bar{\kappa}$	0.999	5.579	10.948	-3.765
60 κ	0.088	10.664	10.117	-4.677
$\bar{\kappa}$	-0.076	7.691	10.272	-4.602
80 κ	0.039	10.826	10.175	-4.735
$\bar{\kappa}$	-0.408	8.970	10.364	-4.809
Analytical	-1.0000	11.0000	10.5600	-4.8000

表-5