積分方程式法の弾性境界値問題への応用
── 数値解析手法に関する一考察 ──

京都大学工学部　正員　　丹羽義次
〃　　〃　　〃　　○福井卓雄

積分方程式法[1]は，線形境界値問題一般に適用できる数値解析手法として，各種の問題について，種々の手法が開発されている。例えば，ポテンシャル問題，定常および非定常波動問題，熱伝導問題，動的および静的弾性問題等，特に，外部境界値問題および三次元の問題において，その有効性が実証されている。一方，これらの問題に現れる積分方程式は一般には特異核を持っており，通常の数値積分法をそのまま用いるだけでは，十分な精度が得られないのが普通である。このような積分方程式の数値解析手法については，個々の問題ごとにそれぞれ工夫がなされているが，いくつかの経験的なものを除いては，共通して使える手法もなく，また，近似解に対する一般的な精度の評価も十分にはなされていない。

最近になって，有限要素法の数学的な背景が興味をもたれ，さかんに研究されるようになった[2]。そこで用いられている，関数解析的手法や直接変分法の考え方は，有限要素法だけでなく，同様の近似手法をもとにした数値解析法一般に有効である。本報文では，弾性境界値問題に等価な積分方程式を有限要素法的手法で数値解析する手法について考察する。

簡単のために，等方，均質な弾性体の静的な三次元境界値問題[1]を考えよう。R^3の中の有界領域をD，その補領域をE，境界をBとする。弾性体中の点xの変位u_iはNaviorの式を満足する。物体力が零のときには，次の様になる。

$$L_{ij}u_j(x) \equiv \mu\left\{u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ij}\right\} = 0 \qquad x\in D,\ x\in E. \qquad (1)$$

Kelvin解 $G_i^{(k)}(x;y) \equiv \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)}r_{,ik}\right\}$　$(r=\sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)})$ を用いると，変位は次の様に表わされる。

$$u_i(x) = \int_B G_i^{(k)}(x;y)\varphi_k(y)\,dS_y \qquad x\in R^3 \qquad (2)$$

境界Bが滑らかであるとき，(2)によって与えられる変位場u_iは全空間R^3で連続である。また，法線ベクトルが$\underline{n}$である面に対する応力ベクトルを

$$\overset{n}{T}_{ij}u_j(x) \equiv \mu\left\{\frac{2\nu}{1-2\nu}u_{j,j}n_i + n_j(u_{i,j}+u_{j,i})\right\} \qquad (3)$$

と定義すれば

$$\varphi_i(x) = -(\overset{n}{T}_{ij}u_j(x))_+ + (\overset{n}{T}_{ij}u_j(x))_- \qquad x\in B \qquad (4)$$

となる。ここで，n_i は境界 B の単位法線ベクトルで，領域 D に対して外向きを正とする。$(\ )_+$，$(\ )_-$ はそれぞれ E および D から境界へ近づけたときの極限値を意味する。

変位境界値問題について考えよう。即ち，境界 B 上で

$$u_i(x) = f_i(x) \qquad x \in B \qquad (5)$$

が与えられているものとする。このとき，$f_i \in H^{\frac{1}{2}}(B)$（$H^{\frac{1}{2}}(B)$ は B 上の Sobolev 空間）に対して，密度 $\varphi_i(x) \in H^{-\frac{1}{2}}(B)$ に関する変分問題は次の様になる。[3]

$$B(\varphi_i, \psi_i) = (f_i, \psi_i) \quad , \qquad {}^\forall \psi_i \in H^{-\frac{1}{2}}(B) \qquad (6)$$

ここに，

$$B(\varphi_i, \psi_i) = \int_B\int_B G_i^{(k)}(x;y)\,\varphi_k(y)\,\psi_i(x)\,dS_x dS_y \qquad (7)$$

$$(f_i, \psi_i) = \int_B f_i(x)\,\psi_i(x)\,dS_x \qquad (8)$$

$B(\varphi_i, \psi_i)$ は双線形汎関数であり，連続かつ強圧的である。従って，Lax-Milgram の定理より，変分問題 (6) の解 $\varphi_i(x) \in H^{-\frac{1}{2}}(B)$ は存在して，一意的である。即ち，境界値問題 (1), (5) はそれに対する積分方程式と同等表現の変分問題 (6) に帰着される。

境界値問題が変分問題に書き直されると，有限要素法の場合に用いる概念をそのまま導入することができて，近似解析における解の収束の検証，誤差の評価等が有限要素法の場合と全く同様になされる。境界 B 上の有限次元関数空間 $V_h \subset H^{-\frac{1}{2}}(B)$ で (6) を近似すれば，

$$B(\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_i) = (\hat{f}_i, \hat{\psi}_i), \qquad {}^\forall \hat{\psi}_i \in V_h \qquad (\hat{\varphi}_i \in V_h,\ \hat{f}_i \text{ は } f_i \text{ の近似}) \qquad (9)$$

となり，

$$\|\underset{\sim}{\varphi} - \hat{\underset{\sim}{\varphi}}\|_{\underset{\sim}{H}^{-\frac{1}{2}}(B)} \leq C\left\{ \inf_{\hat{\varphi}_i \in V_h} \|\underset{\sim}{\varphi} - \hat{\underset{\sim}{\varphi}}\|_{\underset{\sim}{H}^{-\frac{1}{2}}(B)} + \|\underset{\sim}{f} - \hat{\underset{\sim}{f}}\|_{\underset{\sim}{H}^{\frac{1}{2}}(B)} \right\} \qquad (10)$$

となる。ここで，$\|\underset{\sim}{\varphi}\|_{\underset{\sim}{H}^{-\frac{1}{2}}(B)} = \sum_{i=1}^{3} \|\varphi_i\|_{H^{-\frac{1}{2}}(B)}$ であり，C は f_i および h に関係しない定数である。右辺第二項は近似法により再評価されるべき量であり，これによって近似解の誤差評価，さらには，変位および応力の誤差の評価が可能になる。

同様の議論は応力境界値問題についてもできる，例えば外部境界条件が

$$\left(\overset{n}{T}_{ij} u_j(x)\right)_+ = g_i(x), \qquad x \in B$$

で与えられているとき，対応する変分問題は次の様になる。

$$C(\varphi_i, \psi_i) = B(g_i, \psi_i) \quad , \qquad {}^\forall \psi_i \in H^{-\frac{1}{2}}(B)$$

ここに，$$C(\varphi_i, \psi_i) = \frac{1}{2}B(\varphi_i, \psi_i) - \int_B\int_B\int_B G_i^{(k)}(y;z)\,\overset{n}{T}_{ij}^{y} G_j^{(l)}(y;x)\,\varphi_l(x)\,\psi_k(z)\,dS_x dS_y dS_z$$

Ref.

(1) 丹羽，小林，福井：積分方程式法による空洞周辺の三次元応力解析，土木学会論文報告集（投稿中）．

(2) Babuska. I. & A. K. Aziz ; The Mathematical Foundations of the Finite Element Method. The Mathematical Foundations of F.E.M. with appl. to P.D.E. (ed. Aziz) (1972)

(3) Nedelec. J.C. & J. Planchard ; Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème de potentiel extérieur dans $\mathbb{R}^3$, R.A.I.R.O. 7, R3, 105-129. (1973).