

## 直交異方性厚板の三次元応力解析

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

大阪市立大学 正員 堀川都志雄

1. はしがき; 三次元直交異方性の解析は、H.A. Elliot 等の3つの調和関数を用いるもの、S.G. Lekhnitsky の重調和関数を用いるものがあり、又等方弾性論における Mindlin の解と類似の解を示すものに関しては、Kelvin 型と同型の関数を用いる岡村・島田の解<sup>1)</sup>、Y.C. Pan 等は前述の重調和関数を満足する関数を用いるもの<sup>2)</sup>があげられ、著者等は、Lekhnitsky の関数を基本にして直交異方性厚板における2,3の数値結果を示した。<sup>3)</sup> しかしながら、これらの解は、いずれも鉛直方向の  $\lambda$  の定数のみが異なる場合について考慮されたものである。

本研究は、水平面内に三次元および二次元直交異方性の性質を表わす場合の関数およびそれらを用いての直交異方性厚板の解を求めたものである。

## 2. 理論式;

板の中央面内に  $x$ - $y$  軸をとり、その面に垂直に  $z$  軸をとる。さらに、以後の理論においては、 $x$  軸方向の  $\lambda$  の定数のみが異なるものとする。理論式の誘導は、紙面の都合上省略する。

## a) Hooke の法則:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \cdot \varepsilon_x + \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_y + \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_z, & \tau_{xy} &= \bar{\mu} \cdot \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_x + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \cdot \varepsilon_y + \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \bar{\mu} \cdot \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_x + \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_y + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \cdot \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \bar{\mu} \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}$ ;  $\lambda$  の定数 である。

b) 変位関数と変位  $u, v, w$  との関係式;

$$u = \frac{B_{11}}{B_{12}} \left( \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_x, \quad v = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial z^2}, \quad w = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y \partial z} \quad (2)$$

$$\left( R_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left( S_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_x = -\frac{B_{12}}{B_{11} \cdot B_{66}} \cdot X \quad (3)$$

$$\left( T_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \varphi_x = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここで、} \quad 2R_x = a_x + \sqrt{a_x^2 - 4b_x}, \quad 2S_x = a_x - \sqrt{a_x^2 - 4b_x}, \quad T_x = B_{66}/B_{44},$$

$$a_x = (B_{11}B_{22} + B_{66}^2 - B_{12}^2)/(B_{11}B_{66}), \quad b_x = B_{22}/B_{11},$$

$$B_{11} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}, \quad B_{22} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}, \quad B_{66} = \bar{\mu}, \quad B_{44} = \mu, \quad B_{12} = \bar{\lambda} + \bar{\mu},$$

$X$ ;  $x$  軸方向の body-force である。

もし、 $z$  軸方向の  $\lambda$  の定数のみが異なる場合については、変位、body-force も含めて、 $x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow y$  にそれぞれ巡還すれば、著者等が以前に発表したものと一致する。

なお、等方性の場合については、それぞれの  $\lambda$  の定数を同じものとして、 $F_x, \varphi_x$  はそれぞれ Galerkin vector  $W_x$  と Boussinesq の関数  $\psi_x$  とに一致する。

1) 岡村・島田 “内部に集中力を受ける半無限異方性体の解析解”, 第31回年次学術講演会。

2) Y.C. Pan and T.W. Chou “Point Force Solution for an Infinite Transversely Isotropic Solid.” Trans. ASME., Dec., 1976.

3) 堀川 “鉛直方向の弾性係数が異なる厚板の解析”, 第30回年次学術講演会。

二次元直交異方性の平面応力状態における場合は、上式で  $\sigma_y = 0$  とおくことにより得ることができる。これらの式は次のように示される。

$$\sigma_x = \bar{B}_{22} \varepsilon_x + \bar{B}_{12} \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \bar{B}_{12} \varepsilon_x + \bar{B}_{11} \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = B_{66} \gamma_{xy} \quad (1')$$

$$u = \frac{\bar{B}_{11}}{\bar{B}_{12}} \left( \frac{B_{66}}{\bar{B}_{11}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_x, \quad v = -\frac{\partial \psi_x}{\partial x \partial y} \quad (2')$$

$$\left( \frac{\bar{B}_{22}}{\bar{B}_{11}} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\bar{B}_{11} \bar{B}_{22} + B_{66}^2 - \bar{B}_{12}^2}{\bar{B}_{11} \cdot B_{66}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \psi_x = -\frac{\bar{B}_{12}}{\bar{B}_{11} \cdot B_{66}} \bar{X} \quad (3')$$

$$\therefore \bar{B}_{11} = (\lambda + 2\mu) - \lambda^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \bar{B}_{22} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) - \bar{\lambda}^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \bar{B}_{12} = \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \lambda / (\lambda + 2\mu),$$

$\bar{X}$ ; 平面応力状態における body-force. である。

### 3. 数値計算例;

図-1, 2 に示される荷重状態の場合  
についての計算結果を以下に示す。

各諸元は次の通りである。

i) Case-I (図-1):  $b/a = 1.0, \xi/a = \eta/a = 0.5,$

$u/a = v/a = 0.1, h/a = 0.2.$

ii) Case-II (図-2):  $b/a = 1.0, \xi/a = 0.35,$

$\eta/a = 0.5, u/a = v/a = w/a = 0.1, h/a = 0.2, p/a = 0.1.$

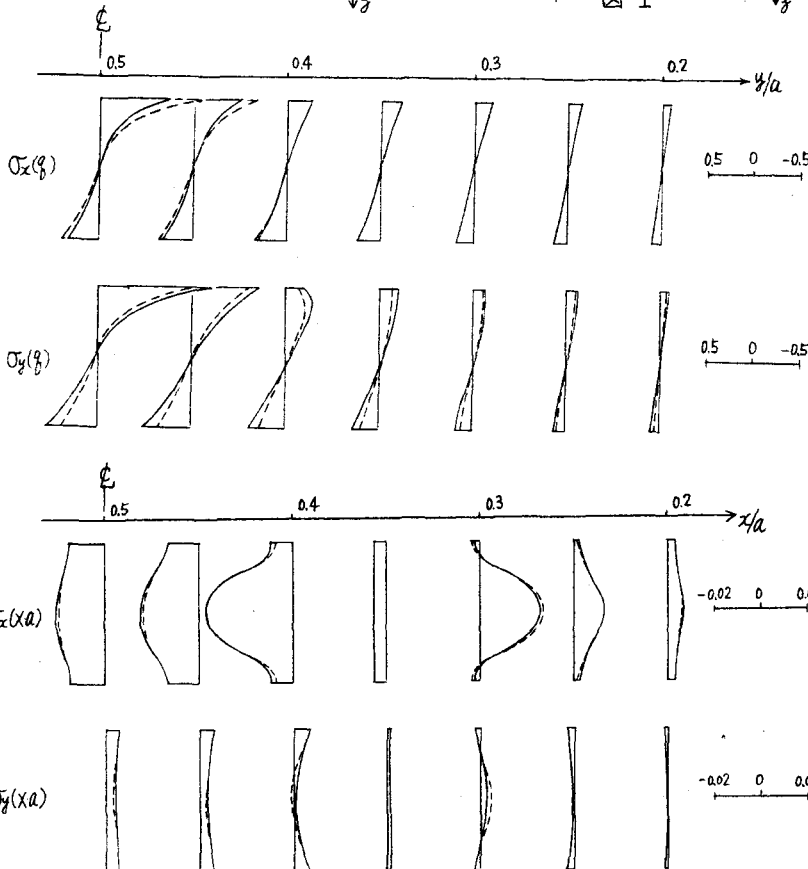
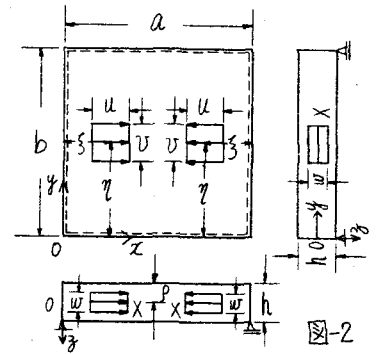
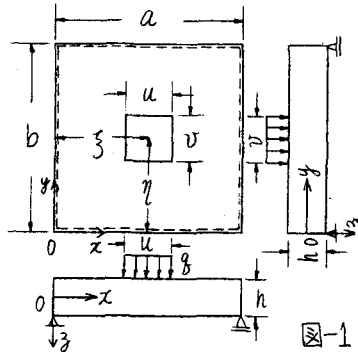


図-3 Case-Iにおける荷重点  
近傍の応力  $\sigma_x, \sigma_y$  の分布図  
( $x/a = 0.5$ ).

本計算に用いたヤング率,  
ポアソン比は次の通りである。  
 $E/\sigma_x = 2.0, \nu_y/\nu_x = 0.3.$

—— 本解法,  
----- 等方性に近解。

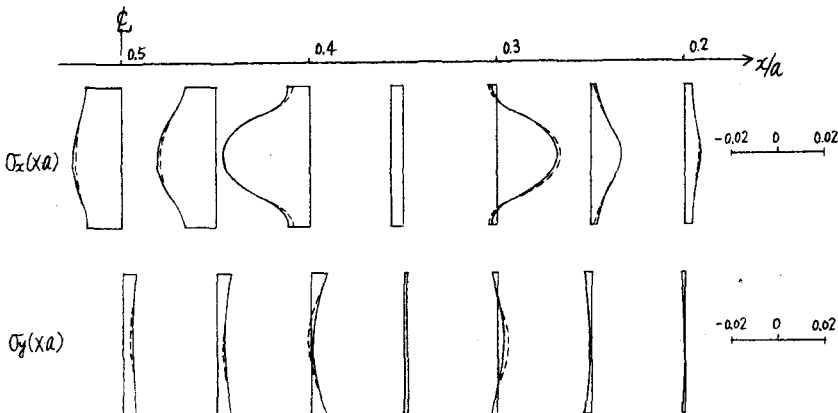


図-4 Case-IIにおける荷重点  
近傍の応力  $\sigma_x, \sigma_y$  の分布図  
( $y/a = 0.5$ ).

#### 4. あとがき;

計算結果によれば、Case-I  
における応力  $\sigma_x, \sigma_y$  の分布  
型は等方性の場合と比べて  
異なっていることが分る。