グラフ理論を利用した工事用資源配分モデルについて

京都大学工学部　正員　春名　攻

1. はじめに —— 数学モデルによる工事用資源配分問題へのアプローチについて

土木工事の施工における管理計画の三本の柱といわれる工程管理，原価管理，品質管理のうちで，前二者と密接な関係を持つ計画対象として工事用資源の運用管理があげられる。工事用資源の運用計画の技法としてはPERT/MANPOWER，RAMPSを始めとする多くの技法が開発されているが，数学モデルによる厳密なアプローチは極めてまれである。これは，運用計画問題が本質的に多くの変数を持つ組合せ問題となることから，数学モデルによるアプローチが効率的な方法とはなりにくく，実用的な要請からのヒューリスティックな技法の開発に多くの努力が払われてきたからである。本稿では，かなり体系づけられてきたグラフの理論を基礎とした運用計画問題のモデル分析を示し，数学的アプローチの可能性の一つの方向を示したいと考える。

2. 資源配分期間

工事中の資源の使用状況は，Network手法などによってスケジュールを求め，これに従って各資源の使用状況を山積図として作成すれば容易に把握できる。この山積図にもとづいて，計画における資源の配分の時間区間に関して少し厳密に考察してみる。各作業に配分される資源は作業実施中は一定であると仮定すると，配分される資源の総量に変化の生じるのは，作業の開始時点と終了時点である。この結果，m箇の作業に対して$2m$箇の時間特性値が求められ，これらを要素とする順序集合が求まる。いま，実行可能な計画においては，資源配分が可能になるとすぐさま配分が行なわれ，作業が実施されるとしても何ら問題はないので，要素の値の等しいものをとりまとめて一つの要素であらわすと，新しい順序集合では要素の数は最高で$(m+1)$となることが容易に理解される。集合は可付番有限集合で

$$T=\{T_0, T_1, T_2, \cdots, T_{j-1}, T_j, \cdots, T_m\},\quad T_{j-1} \leqq T_j \qquad (1)$$

によって表わされる。T_kで分割される時間の区間数は$(m+2)$であるが，$(-\infty, 0]$と(T_m, ∞)は計画作成上で考慮する必要はないので，実際に配分されている期間の数は最高mとなる。

3. 作業の組み合せのパターンa_jと工期λ

作業iが期間$I_j=(T_{j-1}, T_j]$で実施されていることを$a_{ij}=1$，そうでないときを$a_{ij}=0$で表わすと，期間jで同時に実施される作業の組み合せは$a_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})'$によって示されるが，これをパターンと呼ぶことにする。また，各期間jの時間長をx_jとおくと，作業の所要時間d_iとパターンa_j，x_jとの間に次式のような関係が成立する。

$$\sum_j a_{ij} x_j = d_i,\quad i=1,2,\cdots,m,\quad x_j \geqq 0 \qquad (2)$$

各パターンにしたがって使用する資源量の期間内での総和は，使用可能量をこえない。

$$\sum_{i=1}^{m} r_{il} a_{ij} \leqq R_l,\quad l=1,2,\cdots,L,\quad j=1,2,\cdots \qquad (3)$$

ここで，r_{il}は作業iの資源lの所要量，R_lは資源lの使用可能量を表わしている。またλは

$$\lambda = \sum_j x_j \qquad (4)$$

4. 運用計画のための資源配分モデル

ここでは，式(3)を満たすすべてのパターン$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$が求められていると仮定する。運用計画のための資源配分モデルは これまでに示してきた関係を用いてつぎのように定式化される。『制約条件；$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i$，$x_j \geqq 0$ $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ のもとで，目的関数；$\lambda = \sum_{j=1}^{n} x_j$ を最小にするような$\{x_j\}$を求めよ。ただし，$x_j>0$かつ$x_{j'}>0$のとき，$\mathbf{a}_j<\mathbf{a}_{j'}$である。』パターン$\mathbf{a}_j$と$\mathbf{a}_{j'}$の間には満足させなければならない順序関係があるがこれを抱括的に$\mathbf{a}_j<\mathbf{a}_{j'}\,(j \neq j')$によって表わしている。この条件がなければ線形計画の問題になっていることは自明である。また，LPの基底変数と配分已間のところでのべた数mの関係も妥当な結果となっている。すべての作業の間に技術的な順序関係の存在しない場合には線形計画法を用いて最適計画を求めることができるが，一般には，このようなパターンを求めることと，パターン間の順序関係の求め方が解法上の重要な課題となる。

5. グラフのカットとパターンの関係

グラフの理論におけるカットセットの性格やその効率的な求め方はグラフ理論の発達にともなって著しく体系づけられている。ここでは紙面の都合で詳述しないが，有向グラフのカットとパターンの関係について略述しておくことにする。いま，有向グラフのカット$\mathbf{C}_h=\langle X_h, \overline{X}_h \rangle$においては，結合点の集合をNとすると，$X_h \subset N$，$\overline{X}_h \subset N$，$X_h \cap \overline{X}_h = \Phi$かつ$X_h \cup \overline{X}_h = N$である。また，ここで対象とするカットでは，$i \in X_h$かつ$j \in \overline{X}_h$ならば$i<j$であるように限定する。このように対象とするカットを定義すると，カット$\mathbf{C}_h=(C_{1h}, C_{2h}, \cdots, C_{mh})'$より求められるパターン$\mathbf{a}_j$とこのカットの要素の間には次式が成立しなければならない。

$$C_{ih} - a_{ij} \geqq 0\ ,\quad \text{ただし}\quad C_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{作業}i\text{がカット}\mathbf{C}_h\text{に含まれているとき。} \\ 0, & \text{そうでないとき。} \end{cases} \qquad (5)$$

また，実行可能なパターンでは式(3)が満たされなければならないことは言うまでもない。パターン間の順序関係は，カット間の順序関係と深い関連を有するので以下にこれを示す。

6. カット間の順序関係とパターン間の順序関係

パターンのある集合$P_h=\{\mathbf{a}_j;\ \mathbf{C}_h-\mathbf{a}_j \geqq \mathbf{0}\}$が，他のパターンの集合$P_{h'}=\{\mathbf{a}_{j'};\ \mathbf{C}_{h'}-\mathbf{a}_{j'} \geqq \mathbf{0}\}$との間で順序関係を有するとき，これはカット$\mathbf{C}_h$と$\mathbf{C}_{h'}$の間の順序関係の一種の写像となっている。ここで，カットの順序関係とはつぎのような関係をさす。すなわち，

『$C_{jh}=1$，$C_{j'h'}=1$かつ$j<j'$なるj, j'があれば$\mathbf{C}_h<\mathbf{C}_{h'}$。』さらに，パターンの集合間の順序関係は，$\mathbf{C}_h<\mathbf{C}_{h'} \longrightarrow P_h<P_{h'}$となる。したがって，カット間の順序関係が求められればパターン間の順序関係も自然と定められる。ただし，$\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j'} \in P_h \cap P_{h'}$であるようなパターン$\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j'}$間にはこのルールは適用されないことも明らかであろう。

7. おわりに――解法その他について

すべてのパターンが求められており，それらの順序関係も明らかになっている場合にはLPやDPを用いた解法が考えられるが，これにはグラフのカットセットを求めるプロセスでの効率的なプログラムと順序関係の写像のシステマティックな手順を準備しなければならない。これらについては，講演時に例とともに述べることにする。また，この方法によらない解法としてはCutting Stock問題に適用された基底解の補助問題によるシステマティックな生成法と，分岐限定法を併用した解法があるが，これについても講演時に触れる。