

アーランサービスサイクルキューモデルの解析

京都大学工学部 正員 吉川和広
 京都大学工学部 正員 山本幸司
 京都大学工学部 学生員 月野木 聡也

1. はじめに 筆者らは、土木施工分野で数多く見受けられる循環待ち現象の解析方法として、これをサイクルキューとしてモデル化し、失役勾配法によって解析する方法を提案した。その結果、2に箇条書きするような成果が得られた。本稿はこれをふまえて、アーラン分布の位相数をさらに大きくした場合、および4段サイクルキューに拡張した場合について検討を加えたものである。

2. 2段サイクルキューモデルの解析結果

1) アーランサービスサイクルキュー（以下アーラン型CQと略す）は指数型CQよりも生起状態確率変数の記述が複雑となり、 $P(a_1^i, \dots, a_n^i; a_1^i, \dots, a_n^i; n_1, n_2, t)$ という形を必要とする。

2) 状態確率変数の数Mは、

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_{n_1=0}^{n_1} x_1 + n_2 - 1 C_{x_1} \times x_2 + n_2 - 1 C_{x_2} \\ x_1 &= \min\{n_1, S_1\}, x_2 = \min\{n_2, S_2\} \end{aligned} \right\} \quad \text{①}$$

で表わされる。したがって、位相数 n_1, n_2 および窓口数 S_1, S_2 の大きさによってMの値は階段的に増加する。

3) 定常状態を想定すれば状態方程式は、

$$\left. \begin{aligned} AX &= b \\ X &= (x_1, \dots, x_M)^T, \\ b &= (0, \dots, 0, 1)^T, I = (1, \dots, 1) \\ A^* &: \text{対角要素が非零の} M-1 \text{行} M \text{列の疎行列} \end{aligned} \right\} \quad \text{②}$$

という連立一次方程式で表わすことができる。

4) 上記の係数行列Aは「対角要素が非零で非対称かつ非常に疎なキングサイズの行列」であるため、式②のM値が大きくなると消去法的な解法は適用困難である。そこで残差ベクトル $Y = (b - AX)$ を導入して式②を、

$$f(X) = (Y, Y) = (b - AX, b - AX) \quad \text{③}$$

と変形することにより極値問題の解法の一つ

である共役勾配法を適用した。

5) しゅんせつ工事をアーラン型CQとしてモデル化した場合と指数型CQとしてモデル化した場合とでは解析結果（平均待ち行列長、稼働率）にかなりの差が生じたものの、アーランの位相を増加していくとこからはある値に収束していく。またこのような傾向は両段の平均サービス時間比が変化しても継続して認められる。

3. アーランの位相を大きくした場合、および投入資源量を変化させた場合の結果

本研究でとりあげた適用事例のしゅんせつ工事では、 $n_1=11, n_2=110, S_1=1, S_2=3, N=4$ であった。これを式①へ代入すれば $M=2, 117, 061$ となり、状態方程式の作成が不可能に近く、たとえば式②のような連立一次方程式が得られても係数行列Aの非零要素数が莫大となるため（約100万）解析困難である。そこで前稿では $n_1=5, n_2=10$ ($M=1,650$) というモデルで解析したが、今回新たに $n_1=5, n_2=12$ ($M=2,639$) というモデルを作成し解析した。その結果、2.5)の考察がより確実なものとなった。

次に $n_1=2, n_2=5$ の場合を例として、システムへの投入資源量Nを3, 4, 5, 6と変化させた場合を解析し、計算結果を表-1に示した。これよりNが増加するにしたがって平均待ち行列長は増加するが、各サービス窓口の並休率は減少することが認められる。表-1より各ケースの施工能力や直接工事費用（損失費用も含め）を算定することが可能となり、これらは工事用資源の最適台数決定に資する有効な情報となる。

4. 4段サイクルキューモデルへの拡張

ここではシャムセツ工場の土砂積込、往航、土砂投棄、復航をおのおいのサービスステージと考えることにより、4段サイクルキューとしてモデル化することを試みる。まず指数型の生起状態は $(n_1, n_2, n_3, n_4 | t)$ と簡単に記述できるのに対し、アーラン型では、 $(a_1^1 \dots a_{k_1}^1; a_1^2 \dots a_{k_2}^2; a_1^3 \dots a_{k_3}^3; a_1^4 \dots a_{k_4}^4; n_1, n_2, n_3, n_4 | t)$ という形を必要とする。なお両者の間には、

$$P(n_1, n_2, n_3, n_4 | t) = \sum_{*} P(a_1^1 \dots a_{k_1}^1; a_1^2 \dots a_{k_2}^2; a_1^3 \dots a_{k_3}^3; a_1^4 \dots a_{k_4}^4; n_1, n_2, n_3, n_4 | t) \quad \text{④}$$

が成立する。さて指数型の生起状態数 M は式④と同様の考え方から一般に、

$$M = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \sum_{n_3=0}^{N-n_1-n_2} C_{N-n_1} \quad \text{⑤}$$

で求まる。次にアーラン型の生起状態数 M_E を算出するためには、まず式④を考慮して任意の状態 $E_j (n_1, n_2, n_3, n_4 | t)$ を構成する生起状態の数 M_j を算出することから、

$$M_j = \prod_{i=1}^4 \sum_{x_i=0}^{k_i} x_i! C_{x_i}, \quad x_i = \min\{n_i, S_i\} \quad \text{⑥}$$

$$M_E = \sum_{j=1}^{M} M_j \quad \text{⑦}$$

として得られる。これから M_E 個の生起状態それぞれに対して状態方程式を作成すれば、2段サイクルキューの解析法を適用できる。

さて適用事例では、シャムセツ船、押船、土運船がそれぞれ1, 3, 4隻であるため、土砂投棄地点で土運船が作業待ちを生じなければ、 $S_1=1, S_2=S_3=S_4=3, N=4$ である。しかしの場合、土運船は往航—土砂投棄—復航というサービスを受ける間押船と一体となって稼働するため常に、 $n_3+n_4 \leq 3$ でなければならぬ。本稿では土砂投棄地点（ステージ3）で作業待ちを生じる場合についても考慮したが、これらに対する計算結果の一部を示したのが表-2である。これより、

① case A と case B を比較すると、4段としてのモデル化の方が作業効率が高くなる。また case A と case C を比較すると、4段マステ

ージ3の窓口数が少ない場合には作業効率が低下する。

② case C / case B, case E / case D をとるとステージ3での待ちの有無による影響は指数型よりもアーラン型に大きく現われる。ことが明らかとなり、2段としてのモデル化と4段としてのモデル化では解析結果にある程度の差が生じること、およびステージ3で待ちが生じる場合には4段としてのモデル化が必要であることがわかった。

5. おわりに 本稿により、多段循環待ち現象の解析法として英役句配法による方法の有効性が認められた。今後は数多くの実証例を通して最適投入資源量の決定方法に関する研究を進めていく必要がある。
(注) 本稿で用いた記号 S_i : ステージの窓口数, N : 待ち合システム全体の客数, n_i : 任意時刻にステージ i にいる客数, k_i : ステージ i のアーランサービスの位相, q_j : ステージ i の S_i 個の窓口のうち仮想窓口 j でサービス中の客数

表-1 2段サイクルキューモデルの計算結果 (N の変更)

投入資源量	3	4	5	6
Lq_1	0.169	0.286	0.386	0.448
Lq_2	0.000	0.385	1.050	1.907
H_1	0.523	0.615	0.659	0.673
H_2	2.307	2.714	2.905	2.971
U_1	0.476	0.385	0.341	0.326
U_2	0.694	0.285	0.095	0.031

表-2 4段サイクルキューモデルの計算結果

Case 番号	A	B	C	D	E
ステージ数	2	4	4	4	4
サービス方法	指数	指数	指数	アーラン	アーラン
ステージ3での待ちの有無		無	有	無	有
H_1	0.583	0.594	0.576	0.598	0.580
H_2	2.573	2.618	2.541	2.639	2.558
Lq_1	0.427	0.382	0.358	0.361	0.341
Lq_2	0.417	0.406	0.427	0.402	0.420
Lq_3			0.101		0.101

(注) 上表において、 Lq_i : ステージ i の平均待ち行列長, H_i : ステージ i でサービス中の客数, U_i : ステージ i の窓口の遊休率