波の定常流的考察

和歌山工業高等専門学校　正員　田中　光

1）まえがき

波の解法は流体力学によるものがもつとも厳密であるが，数学的に難解であるうえに，波の構成要素が非常に多く，一般の技術者にとつて理解が中々容易ではない。本文は波を主として物理的な面から観察し，簡単な数式を用いて波浪現象の把握を試みたものである。

その概要は波速に等しい流速を進行方向と逆方向に加え，波形を固定し，定常流の水理現象として考察を進める。また実際の波の水粒子の運動は，完全流体の仮定でも，一般には水面で大で，水深の増加とともに減小しているが，ここでは仮に，完全流体の水流の如く，上下均等な流速分布を有する仮想的な定常流とし，連続の式およびベルヌーイの定理を満足するものとして，その仮想流から求めた波が如何なる挙動を示すかを調べ，それが実際の波の式とどの程度の相似性を有するかを検討したものである。

2）基本式の誘導

高さの基準線を流速均等分布換算水深線（略して換算水深線）にとる。

E：比エネルギー線
h_0：波高中心高
h：静水面高（水底又は止水線より）
h_t：谷までの高さ
h_c：峯までの高さ
H：波高
u_c, u_t：峯および谷における水粒子の水平速度

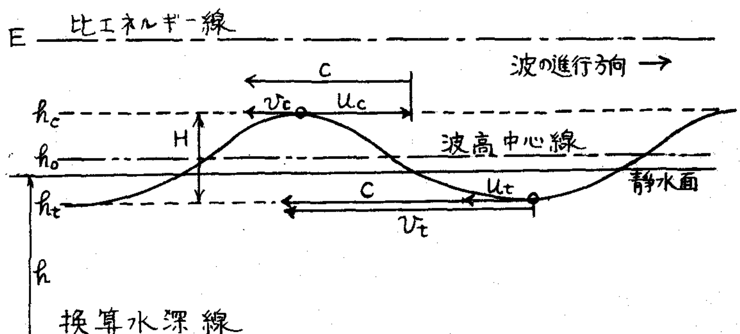

図１　水位，波高，流速関係図

v_c, v_t：定常流にした峯および谷の水平流速　$v_c = C - u_c$, $v_t = C + u_t$　(1)

ベルヌーイの定理　$h_t + \frac{v_t^2}{2g} = (h_t + H) + \frac{v_c^2}{2g} = E$　(2)

連続の式　$v_t h_t = (h_t + H) v_c = Q$　Qは定常流の流量　(3)

(1)，(2)，(3) において $h_0 = h_t + \frac{H}{2} = h_c - \frac{H}{2}$ であり，仮に $u_t = u_c = u$ とせば，直にベルヌーイの定理は $2uC = gH$ (2′)，連続の式は $2uh_0 = CH$ (3′) で示され，波速 $C = \sqrt{gh_0}$ (4)，水粒子の速度 $u = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{h_0}}$ (5)

次に波高中心高における水粒子の鉛直速度 w は，水平速度 $u = 0$ とし，ベルヌーイの定理より

$$h_0 + \frac{w^2 + C^2}{2g} = h_t + \frac{v_t^2}{2g} = \left(h_0 - \frac{H}{2}\right) + \frac{1}{2g}(C + u)^2 \quad (6)$$

であり，これに (4)，(5) の C と u を代入すれば $w = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{h_0}}$ (7) となつて $w = u$，即ち主要点（峯，谷，波高中心高）の水粒子の速度は等しくなり，水粒子は円運動をなすことが類推される。円運動をなすとした場合，角周波数を σ，周期をT，波長

をLとせば　$\sigma=\dfrac{u}{H/2}=\sqrt{\dfrac{g}{h_0}}$，$T=\dfrac{2\pi}{\sigma}=2\pi\sqrt{\dfrac{h_0}{g}}$，$L=CT=2\pi h_0$　　(8)

上式では h_0 は水底までの深さ h による制限を受けない範囲では，周期Tのみによって定まるので，(8)は深海波の式となる。なほ h_0 は後記の通り波の実質的な影響水深の約 1/3 である。また(8)は直ちに　$L=\dfrac{gT^2}{2\pi}$，$C=\dfrac{gT}{2\pi}$　の公式に変る。次にTの増大とともに，h_0 も大となり，波の影響が水底まで及べば，h_0 は h による制約をうけるに到る。Tがさらに大となり（したがって h_0 も大となるべきところ），逆に水深がきわめて浅ければ，流速は均等分布に似てくることは充分想像され，本考察の仮定と一致し，微小振幅波では $h_0 \fallingdotseq h$ となり (4)，(5) より　$C=\sqrt{gh}$，$u=\dfrac{H}{2}\sqrt{\dfrac{g}{h}}=\eta\dfrac{C}{h}$　（η：水面上昇高）　(9) 長波

3) 微小振幅浅海波における h, h_0, k, T などの相互関係

微小振幅波では静水面と波高中心高とを一致させるので，深海波では　$L=2\pi h_0$，波数 $k=\dfrac{2\pi}{L}$ より　$kh_0=1$，$kh\to\infty$ である。長波では $h_0 \fallingdotseq h$　∴ $kh_0 \fallingdotseq kh$ である。h_0 と h との関係を，それぞれ k で無次元化した後，$y=f(x)$ 即ち $kh_0=f(kh)$ とおけば，図2の如くになり，tanh が適合していることがわかる。故に $h_0k=\tanh(kh)$ となり，この h_0 を(4)，(5) に代入すれば浅海波の公式をうる。一般に波数の逆数 (k^{-1}) は長さの次元をもち，波長の $1/2\pi$，約 1/6 である。なお (kh) は h/k^{-1} であり，水深 h と長さ (k^{-1}) の比である。また深海波では $\tanh(kh)=1$ のため，ほぼ $kh>3$ で，$kh_0=1$ と較べ，h は h_0 の3倍(又はLの2倍)以上必要である。

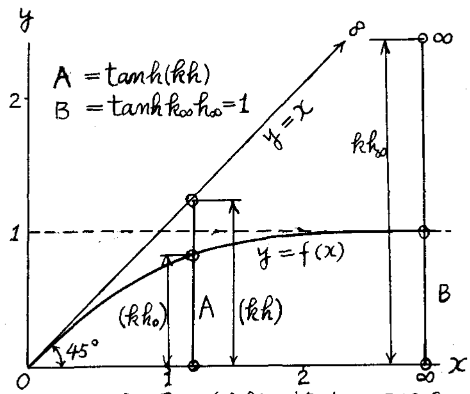

図2　水深 $x(kh)$ と換算水深(kh_0)

次に水粒子は短軸をA，長軸をBとするだ円運動をなし，$A/B=\tanh kh$ とする式について考察する。水深 h のときの k, h, h_0 を夫々 k_ℓ, h_ℓ, $h_{0\ell}$ の如くに示せば，$A/B=\tanh(k_\ell h_\ell)=\tanh(k_\ell h_\ell)/1$ であり，分母を $\tanh(kh)$ の形で表せば，$1=\tanh\infty=\tanh(k_\infty h_\infty)=k_\infty h_{0\infty}$ であり，$A/B=(k_\ell h_{0\ell})/(k_\infty h_{0\infty})$ となる。即ち A/B は浅海と深海の換算水深を，それぞれの波数で無次元化したものの比となる。つまり同一のTに対する h_0 は浅海と深海の $h_{0\ell}$, $h_{0\infty}$ とに分れ，前者は鉛直方向の運動や波速に，後者は水平方向の運動に対応する。なお $A/B=k_\ell^{-1}/k_\infty^{-1}=L_\ell/L_\infty=C_\ell/C_\infty=\sqrt{h_{0\ell}/h_{0\infty}}=(k_\ell h_{0\ell})/(k_\infty h_{0\infty})=\tanh(k_\ell h_\ell)$ となり，k_ℓ は $k_\ell^{-1}=g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2\tanh(k_\ell h_\ell)$ より，周期Tと水深 h が定れば k_ℓ は計算出来，浅海波の諸要素は求まる。なお上式は浅海波における水深の変化による諸元の変化をも示す。

4) むすび

以上の結果から，初め単に仮想的なものと考えた換算水深は，従来の公式における現実的な物理量（$1/k\ \tanh kh$）と密接に結びつくことが判明したが，h_0 は本来，換算水深線から波高中心までの高さであり，微小振幅波の如く静水面までのものではない。その差は本理論から容易に誘導出来，この微小差が有限振幅波への発展の鍵となるが，これについては次の機会にゆづりたい。