

有限振幅波の shoaling の理論

京大防災研 正員 土屋 義人
 : 正員 安田 孝志
 京大大学院 学生員 山下 隆男

1. 諸言: 本研究では波速の物理的定義に全く依存しない, 非回転流体場での有限振幅波理論に基づく shoaling の理論を展開し, 水深および流速の変化による波の変形を波高について示す。このため, 従来の shoaling の計算と同様, 任意断面におけるエネルギーフラックスは水深および流速の変化に対して一定であるとし, 周期に関しても同様の仮定を設定するとともに, Stokes の波速の定義を全く必要としない, 著者らによって提案された二つの有限振幅波理論—新しい 7/10 波理論および擬 Stokes 波理論—を用いて shoaling の計算を行う。

2. 水深変化による波の変形 (1) エネルギーフラックスおよび shoaling: 深海での波のエネルギーフラックス W_0 は Le Méhauté らによって次式のように与えられている。

$$W_0 = (\rho T^5 / 32\pi)(L_0/T)^4 \lambda_0^2 (4 + 3\lambda_0)^2 \tag{1}$$

ここに, ρ : 水の密度, T : 波の周期, および L_0 : 深海での波長, を示し, λ_0 は次式で与えられる。

$$(3/8)\lambda_0^3 + \lambda_0 - \pi(H_0/L_0) = 0 \tag{2}$$

ここに, H_0 : 深海での波高, である。一方, 浅海での波のエネルギーフラックスは擬 Stokes 波理論を用いれば, 次式で表わされる。

$$W_0 = \rho g h^2 \sqrt{gh} (\lambda_0^2/8) \{ 1 - (1/2)(2\pi h/L)^2 + (1/8)(2\pi h/L)^4 + (1211/15120)(2\pi h/L)^6 + (9\lambda_0^2/64)/(2\pi h/L)^4 + (423\lambda_0^2/64)(2\pi h/L)^2 \} \tag{3}$$

ここに, h : 平均水深, および L : 波長, であり, λ_0 は次式に示される波高-水深比 H/h に相当するパラメーターである。

$$(27\lambda_0^2/1024)/(2\pi h/L)^6 + (27\lambda_0^2/256)/(2\pi h/L)^4 + \lambda_0 = H/h \tag{4}$$

また, 新しい 7/10 波理論の第 3 次近似解を用いると, エネルギーフラックスは次式になる。

$$W_0 = (\rho g h^2 \sqrt{gh} \lambda^2 / 3k^4) \{ -e(3e + 2k^2 - 4) + k^2 - 1 \} + (\rho g h^2 \sqrt{gh} \lambda^3 / 30k^6) \{ 255e^2(e + k^2 - 2) + e(58k^2 - 313k^2 + 313) - 29k^4 + 87k^2 - 58 \} + (\rho g h^2 \sqrt{gh} \lambda^4 / 4200k^8) \{ -25e^3(8463e + 11732k^2 - 22792) - e^2(127211k^4 - 56716k^2 + 555961) - e(16642k^6 - 152174k^4 + 351070k^2 - 232180) + 8321k^6 - 42765k^4 + 68888k^2 - 34444 \} \tag{5}$$

ここに, $e = E/K$, K および E : それぞれ第 1 種および第 2 種完全楕円積分, k : 楕円積分の母数, であり, また λ は次式から求められる。

$$\lambda = A^{1/3} - (-B)^{1/3} - a_1/3, \quad A = -a_1^2/27 + a_1 a_2/6 - a_3/2 + (1/6)(27a_3^2 + 4a_2^2 - a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 - 18a_1 a_2 a_3)^{1/2}, \quad B = -a_1^3/27 + a_1 a_2/6 - a_3/2 - (1/6)(27a_3^2 + 4a_2^2 - a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 - 18a_1 a_2 a_3)^{1/2} \\ a_1 = \{-20k^2(2e + 5k^2 - 10)\} / \{10e(83e + 76k^2 - 136) + 130k^4 - 560k^2 + 560\} \\ a_2 = 80k^4 / \{10e(83e + 76k^2 - 136) + 130k^4 - 560k^2 + 560\}, \quad a_3 = 80k^4(H/h) / \{10e(83e + 76k^2 - 136) + 130k^4 - 560k^2 + 560\} \tag{6}$$

本研究では, $0.05 \leq h/L_0 < 0.1$ の領域での波の変形を取扱う場合には擬 Stokes 波理論を

適用することにして、次式の連立非線型方程式を解いた。

$$W_0 = W_2, \{2\pi(1+\lambda_0^2)(h/L_0)\}^{1/2} - (C/\sqrt{gh})(2\pi h/L) = 0 \quad (7)$$

ここに、 C : 波速であって、それは $C/\sqrt{gh} = 1 - (2\pi h/L)^2/6 + (19/360)(2\pi h/L)^4 - (55/3024)(2\pi h/L)^6 + (2941/604800)(2\pi h/L)^8 + (9/64)\lambda_0^2/(2\pi h/L)^2 + (9/128)\lambda_0^2$ で与えられる。

一方、 $h/L_0 \leq 0.05$ の領域では新しいクワイド波理論を適用し、次式の連立方程式を解いた。

$$W_0 = W_6, 4K\lambda\{(1+\lambda^2)(h/L_0)/2\pi\}^{1/2} - (3\lambda)^{1/2}(C/\sqrt{gh}) = 0 \quad (8)$$

ここに、 $C/\sqrt{gh} = 1 - (\lambda/2k^2)(3e+k^2-2) + (\lambda^2/40k^4)\{45e(3e+2k^2-4) + 19k^4 - 64k^2 + 64\} + (\lambda^3/k^6)\{C(1/560)e^2(6927e+10799k^2-14112) + (1/2800)e(4603k^4+77092k^2-80317) - (1/5600)(24155k^6-74838k^4+5959k^2+41974)\}$ 、である。数値計算にあたっては、いずれの場合もそれぞれの式を 10^{-8} の精度で満足するように考慮した。

(2) 計算結果および考察: 図-1は H/H_0 と h/L_0 との関係性を H_0/L_0 をパラメータとして示したものである。図中の Breaking inception は新しいクワイド波理論の第3次近似解、および擬 Stokes 波理論の第4次近似解を用いて、Stokes の条件より求めたものである。図-1において、クワイド波理論と擬 Stokes 波理論の持続が滑らかであるのは擬 Stokes 波理論がクワイド波理論の \sin 関数展開の特性を捨つるから理解されよう。また、図中のクワイド波理論の第1次、第2次および第3次近似解の比較から、 $h/L_0 < 0.01$ では、近似による相違はほとんど無視できるが、 $h/L_0 > 0.01$ では、その相違が顕著になり、高次解による結果ほど微小振幅波による結果に近づく傾向がある。

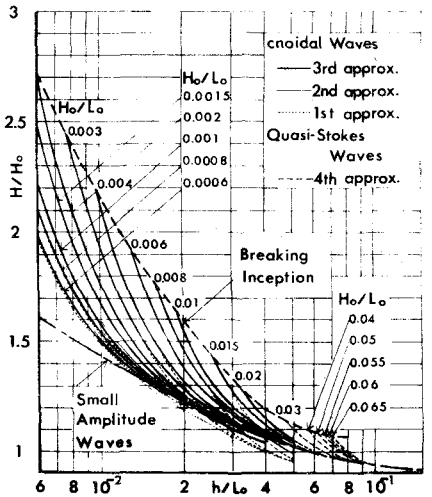


図-1

3. 流速変化による波の変形 (1) エネルギーフラックスおよび

shoaling: 深海での一様流の流速をゼロとすれば、

エネルギーフラックスは式(1)で表わされる。一方、一様水深の場合でのエネルギーフラックスは、一様流を伴うクワイド波理論を用いれば次式で表わされる。

$$W_{c,u} = (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^2 / 6k^4) (3Fr+2)(Fr+1) \{-e(3e+2k^2-4) + k^2 - 1\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^3 / 30k^6) \{255e^2(e+k^2-2) + e(58k^4-313k^2+313) - 29(k^4-3k^2+2)\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^3 Fr / 60k^6) \{990e^2(e+k^2-2) + e(228k^4+1218k^2+1218) - 114(k^4-3k^2+2)\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^3 Fr / 20k^6) \{145e^2(e+k^2-2) + e(34k^4-179k^2+179) + 17(k^4-3k^2+2)\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^4 / 8400k^8) \{-e^3(423150e + 586600k^2 - 1139600) - e^2(254422k^4 - 1134322k^2 + 1111922) - e(33284k^6 - 304348k^4 + 702140k^2 - 464360) + 16642k^6 - 85530k^4 + 137776k^2 - 68888\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^4 / 8400k^8) \{-306600e^4 - 431200k^2e^3 + 828800e^2 - 188272k^4e^2 + 835072k^2e^2 - 812672e^2 - 23904k^6e + 224128k^4e - 517760k^2e + 341440e + 11952k^6 - 62920k^4 + 101936k^2 - 50968\} + (\rho gh^2 \sqrt{gh} \lambda^4 Fr / 120k^8) \{-e^3(1710e + 2280k^2 - 4560) - e^2(978k^4 - 4398k^2 + 4398) - e(140k^6 - 1188k^4 + 2724k^2 - 1816) + 70k^6 - 338k^4 + 536k^2 - 268\} \quad (9)$$

ここに、 Fr は Froude 数であって、一様流の流速を U とすれば、 $Fr = U/\sqrt{gh}$ と与えられる。

以上のエネルギーフラックスを用いると、流れを伴う場合の波の shoaling は次式の連立方程式を解くことにより求められる。

$$W_0 = W_{c0}, \quad 4Kk\{(1+\lambda_0^2)(h/L_0)/2\pi\}^{1/2} - (3\lambda)^{1/2}(c/\sqrt{gh} + Fr) = 0 \quad (10)$$

この場合も、数値計算は 10^{-8} の精度で行った。

② 計算結果および考察：図-2 は、 $H_0/L_0 = 0.0006$ の場合の H/H_0 の Fr および $T\sqrt{g/h}$ との関係を示したものである。この図から、 $T\sqrt{g/h} = 10$ の場合において Fr の変化に対して H/H_0 が最も大きく変動し、波と流れの相互干渉効果が大きいが、 $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに、それは減少する傾向のあることがわかる。また図-3 は $T\sqrt{g/h} = 20$ の場合において、 H/H_0 と Fr および H_0/L_0 との関係を示したものであるが、 $Fr < 0$ では微小振幅波理論による結果に比べて H/H_0 は急激な増大を示す一方、 $Fr > 0$ では逆に急激な減少を示し、微小振幅波理論を用いた場合とさきわめて異なる結果を示しているのがわかる。さらに、 $T\sqrt{g/h} = 20$ の場合、 $H_0/L_0 < 0.001$ 以下では、 H_0/L_0 の影響はほとんど無視でき、 Fr のみで波高変化が決定されるのがわかる。

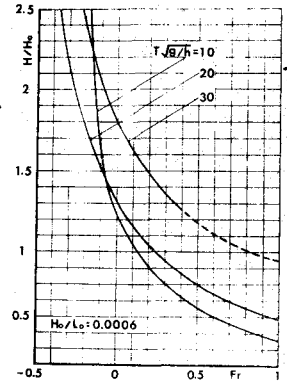


図-2

4. 結語：以上、Stokes の波速の定義に全く依存しない有限振幅波理論に基づく shoaling の計算を行ない、水深および流速変化による波の変形例を示した。この結果、本研究で用いた有限振幅波理論に基づく shoaling の計算結果はさきわめて安定した収れん性を示し、砕波限界の近くでは近似による相違は無視できるほど小さいこと、また、流れを伴う場合、 $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに Fr に対する H/H_0 の変化の割合が減少すること、さらに Fr の絶対値が大きくなるにつれて、微小振幅波理論による結果との相違が著しくなることが明らかになった。最後に、本研究にあたり、適切な御助言をいただいた京大防災研究所山口正隆助教授に謝意を表すとともに、数値計算は京大大型計算機センターの FACOM 230-75、および 防災研究所資料センターの FACOM 230-25 を用いたことを付記する。

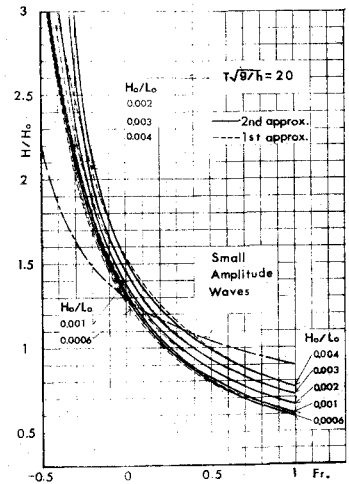


図-3