有限要素法による粘性流体解析

大阪大学工学部　正員　椹木　亨
大阪大学工学部　正員　中辻啓二

1. まえがき

沿岸海域あるいは変断面水路における水質の移流分散過程の解析にあたっては，その局所的な流動のもつ渦度の非定常な挙動が重要な因子となる。従来，渦度方程式の数値解法としては有限差分法によるのが通例であるが，直交格子網を選ばざるを得ない結果，複雑な境界形状に原因する局所的な流動の解析には不適切であった。そこで，本研究においては格子網を任意に選択でき，且つ格子間隔を現象に合わせて分割し得る重み付き残差法の二次元粘性流体への適用を試みたので，ここに報告する。有限要素法による流体解析はStokes流れにはじまり最近適用される例が数多くなりつつあるが，まだまだ実現象のレイノルズ数まで十分に大きくするところまでは至っていないのが現状である。

2. 基礎方程式

二次元非定常非圧縮性流体に関するNavier-Stokes方程式を流れ関数ψと渦度ωとを用いて表示するならば，基礎式をつぎのように誘導できる。

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\Delta\omega \qquad (1)$$

$$\omega=-\Delta\psi=-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

ここに，$u=\partial\psi/\partial y$，$v=-\partial\psi/\partial x$，$\nu$：動粘性係数

境界条件は各ψ，ωに関してつぎの3種類に分離される。

$$\left\{\begin{array}{lll}\psi(x,y,t),\ \omega(x,y,t)：既知量 & & \text{along } S_{up}\ (上流境界)\\ \partial\psi/\partial x=\partial\psi/\partial y=0, & \psi(x,y,t)：既知量 & \text{along } S_r\ (固定境界)\\ \partial\psi/\partial n=\partial\omega/\partial n=0 & & \text{along } S_e\ (下流境界)\end{array}\right\} \qquad (3)$$

3. Galerkin法による定式化

基礎方程式を有限要素法的に離散化するために，内挿関数$N_i(x,y)$を重み関数とする積分型に変換する方法を考える。すなわち，三角形要素を用いて内挿関数を表示するならば

$$N_i(x,y)=(a_i+b_ix+c_iy)/2\Delta \quad , \quad i=i,j,k \qquad (4)$$

ここに，$a_i=x_jy_k-x_ky_j$，$b_i=y_j-y_k$，$c_i=x_k-x_j$，$2\Delta=a_i+a_j+a_k$

となり，要素内の未知関数は節点値で線型補間でき$\psi=\sum_i N_i\psi_i$，$\omega=\sum_i N_i\omega_i$となる。基礎方程式にこの$N_i$を掛けて対象領域にわたって積分すると連立積分方程式に変換できるが，上記の線型補間では二次微分商が0となり表現が適切でない。そこで部分積分を用いてGaussの発散定理を導入することにより次式の一次微分の連立方程式に変換する。

$$\iint_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi\nabla N_j+N_j\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\nu\nabla\omega\nabla N_j\right\}dxdy-\int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial n}N_j+\nu\frac{\partial\omega}{\partial n}N_j\right\}dS=0 \qquad (5)$$

$$\iint_\Omega\{\omega N_j-\nabla\psi\nabla N_j\}dxdy-\int\frac{\partial\psi}{\partial n}N_j\,dS=0 \qquad (6)$$

式(5), (6) の境界に沿っての線積分を消去するためには，各々の境界に対して

$$N_j = 0 \quad \text{along } S_{up} \text{ at eqs.(5),(6)} \quad , \quad N_j = 0 \quad \text{along } S_r \text{ at eq.(6)}$$

を満たすような形状関数 N_j を導入する必要があるが，上記三角形要素を用いた場合には外部境界に沿う線積分に関して全ての N_j は0となり，また内部境界に関してもフラックスの符号が正負逆となることから線積分の配慮は必要でなくなり，結局次式のようになる。

$$\iint_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \sum_i N_i \psi_i \nabla N_j + N_j \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial y} N_i \psi_i \sum_i \frac{\partial}{\partial x} N_i \omega_i + \sum_i \frac{\partial}{\partial x} N_i \psi_i \sum_i \frac{\partial}{\partial y} N_i \omega_i \right) + \nu \nabla \sum_i N_i \omega_i \nabla N_j \right\} dx\,dy = 0 \qquad (5)'$$

$$\iint_\Omega \left\{ \sum_i N_i \omega_i \cdot N_j - \nabla \sum_i N_i \psi_i \cdot \nabla N_j \right\} dx\,dy = 0 \qquad (6)'$$

また，面積座標系を導入して書き直すと各有限要素に対して行列表示できる。すなわち，

$$\begin{cases} [\mathbb{A}] \cdot \{\partial \psi_i / \partial t\} + [\mathbb{B}] \{\psi_i\} = -[\mathbb{C}] \{\omega_i\} & (7) \\ [\mathbb{D}] \cdot \{\omega_i\} = [\mathbb{E}] \cdot \{\psi_i\} & (8) \end{cases}$$

ここに，

$$\begin{cases} \mathbb{A}_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j)/4\Delta \ , \quad \mathbb{B}_{ij} = (b_k \omega_k \cdot c_i - c_k \omega_k b_i)\, a_j / 8\Delta^2 \\ \mathbb{C}_{ij} = \nu (b_i b_j + c_i c_j)/4\Delta \ , \quad \mathbb{E}_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j)/4\Delta \\ \mathbb{D}_{ij} = \iint_\Omega (a_i + b_i x + c_i y)(a_j + b_j x + c_j y)/4\Delta^2 \, dx\,dy \end{cases}$$

計算の手順は式(7),(8)を拡大して全計算領域に対する係数行列を組み立て，境界条件(3)を配慮して連立常微分方程式を数値的に解くことにより所要の解を得る。

5. 数値計算例

計算例として二次元急拡大水路の流れを取り扱った。用いた格子網は図-1に示す160要素，101節点からなる三角形要素であり，上流側条件としてポアズイユの流れ $\omega = 3y$, $\psi = 1.5(y - y^3/3)$ を与えた。S_{up} におけるレイノルズ数が25の場合の流れ関数 ψ およびこの結果を用いて計算した流速 U, V の数値解の分布を下図に示す。要素分割が粗いために水理実験にみられる急拡大部の渦の発生・発達が十分に見い出せなく実現象との対応で論じられない。この原因は現象に対比して離散化間隔が大きいこと，換言すれば境界における渦度分布の配慮の乏しさにあると考えられる。レイノルズ数の増大にともなう渦の挙動については講演時に詳述したい。

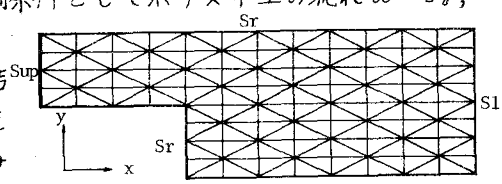

図-1 格子網

velocity U (y ←, x ↓)

0.330	0.287	0.225	0.157				
0.278	0.253	0.219	0.250				
0.261	0.247	0.232	0.259				
0.260	0.251	0.240	0.250				
0.243	0.235	0.216	0.169	0.028	0.041	0.023	0.045
0.207	0.196	0.175	0.101	0.067	0.079	0.075	0.099
0.175	0.167	0.145	0.116	0.090	0.083	0.101	0.124
0.154	0.148	0.138	0.119	0.104	0.096	0.105	0.136
0.143	0.140	0.133	0.125	0.113	0.103	0.109	0.133
0.139	0.137	0.134	0.128	0.121	0.111	0.106	0.125
0.137	0.136	0.134	0.131	0.126	0.119	0.111	0.107
0.136	0.136	0.134	0.132	0.130	0.123	0.114	0.095

stream function (y ←, x ↓)

0.000	0.367	0.688	0.914	1.000				
0.000	0.294	0.541	0.772	1.000				
0.000	0.262	0.513	0.727	1.000				
0.000	0.260	0.504	0.754	1.000				
0.000	0.259	0.516	0.745	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.000	0.227	0.440	0.642	0.725	0.782	0.864	0.910	1.000
0.000	0.188	0.367	0.516	0.635	0.711	0.788	0.892	1.000
0.000	0.162	0.315	0.457	0.569	0.672	0.762	0.860	1.000
0.000	0.147	0.290	0.423	0.548	0.653	0.755	0.868	1.000
0.000	0.140	0.278	0.411	0.536	0.656	0.761	0.866	1.000
0.000	0.137	0.273	0.406	0.537	0.659	0.778	0.884	1.000
0.000	0.136	0.272	0.406	0.537	0.667	0.786	0.901	1.000
0.000	0.136	0.272	0.406	0.539	0.670	0.797	0.909	1.000

velocity V (y ←, x ↓)

.037	.106	.140	.071				
.016	.034	.040	.023				
.009	.006	-.009	-.013				
.001	-.005	-.002	.004				
.016	.054	.090	.190	.247	.177	.113	.045
.020	.056	.010	.108	.080	.073	.047	.009
.013	.039	.056	.062	.053	.033	.029	.016
.007	.019	.029	.028	.020	.013	-.000	-.004
.003	.010	.012	.012	.004	-.004	-.002	.001
.001	.004	.005	.002	-.002	-.010	-.018	-.009
.000	.001	.001	.000	-.004	-.008	-.012	-.008
.000	.000	.000	-.001	-.002	-.007	-.009	-.004