

運動量解析法による非定常流の数値計算

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗
 〇井上 和也
 浅沼組 大森 義雄

はじめに 開水路の非定常流の数値シミュレーションにおいて、流れが漸変な場合には一次元エネルギー解析法が有効に適用されるが、一方例えば流れの時間的变化が急激で段波の発生が予想される場合、損失として摩擦項のみを含むエネルギー式では不適当と考えられる。この部分では通常運動量解析法が適用され、その結果を用いて段波での損失が求められる。本報は流れを運動量解析法を用いてシミュレーションするための方法について述べるとともに、段波を含む流れの数値実験および水理実験を行なったものである。なお運動量解析法を用いるので、水路として一様水路を前提としている。

1 基礎式

運動量解析のための基礎式は、連続式およびx方向の運動量の保存則を表わす次式より構成される。

連続式: $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots (1)$ 運動量式: $\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \dots (2)$

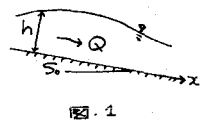


図. 1

ここで、横流入流量はなしとされており、またMは次式で与えられる。

$M = \frac{\rho Q^2}{gA} + \lambda' h_a A \cos \theta \dots (3)$

λ' : 運動量解析法に関する圧力分布補正係数, h_a : 断面の圆心の水面からの深さである。

(1), (2)式を保存則系にまとめるとつぎのようになる。

$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = g \dots (4)$ $U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} Q \\ gM \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \dots (5)$

(4)式はまたつぎのように改められる。(図. 2)

$\int_C F dt - U dx = \int_S g dx dt \dots (6)$

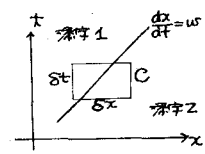


図. 2

いま、図. 2に示されるように、流れの不連続な部分(段波)の軌跡がx-t平面上で $dx/dt = w$ で表わされるとする。(段波の伝播速度がw)

このとき、(6)式の閉曲線を図のようにとり、不連続のそれぞれの側の値と添字1および2で表わせば次式が得られる。($\delta x, \delta t \rightarrow 0$)

$-w(U_1 - U_2) + (F_1 - F_2) = 0 \dots (7)$

すなわち、Rankine-Hugoniotの関係である。U, Fとして(5)式の諸量を代入すれば段波に関する通常の関係式が導かれる。

2 段波を含む流れのシミュレーション

(1), (2)式による数値計算法として、Lax-Wendroff法およびつぎの特性曲線法を用いた。

特性曲線法: (1), (2)式を特性曲線に沿う関係に改める。

$dx/dt = \rho v \pm c$ に沿って

$$(-\rho v + c) \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + g \frac{\partial M}{\partial x} - g A (s_0 - s_f) \right) = 0 \quad \dots (8)$$

ここで $c = \sqrt{g(\rho-1)v^2 + gA \cos \theta / B}$ である。(8)式の差分法は前報と同様なので省略する。

図3は前報と同様の上流端の水位変化を与えた場合を、差分格子を前報より小さくして計算した結果である。図中の破線は前報での結果であり、点線は前報と同じ差分格子を用い、しかも計算区間をつねに水路全長としにときの結果である。前報ではエネルギー解析法がとられていたが、図3からみて、解析法の違いより、差分格子、計算法、計算区間のとり方による差の大きいことが分る。L.W法による水面の振動の理由は現段階では不明である。

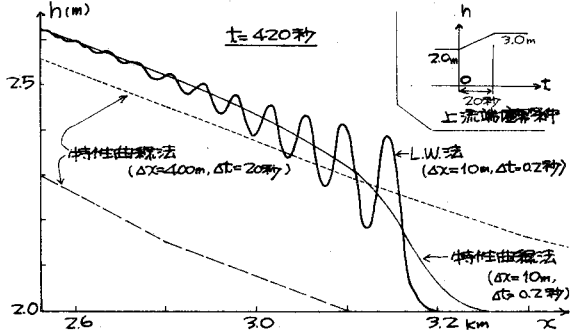
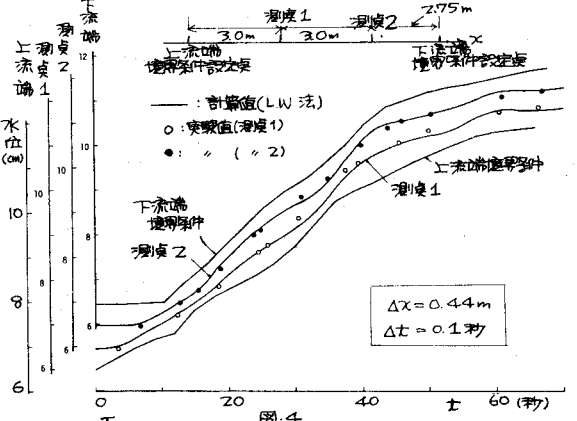
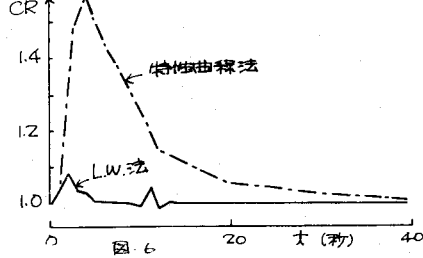
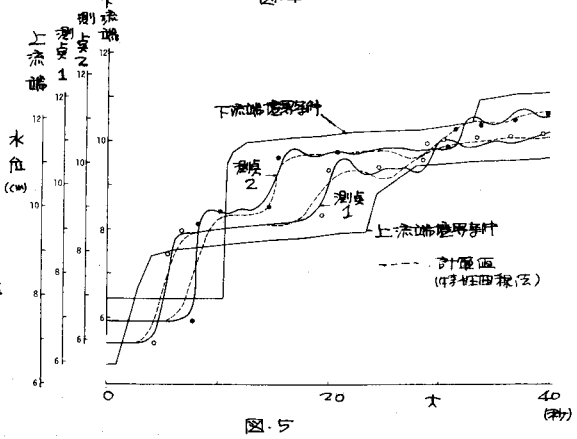


図4,5は、水理実験の結果であって、図に示される上流端、下流端の水位の実測値を境界条件として、運動量解析法によって計算した結果である。流れの変化の緩やかな図4およびそれが急な図5のいずれもL.W法によって段波も含めてよく実験と一致した結果が得られる。一方、特性曲線法は、変化の急な部分で平滑化されることが分る。水路区間をLとするとき、



$CR = \frac{\int_0^L Q(x,t) dx}{\int_0^L Q(x,0) dx} = \frac{\int_0^L (A(x,t) - A(x,0)) dx}{\int_0^L (A(x,t) - A(x,0)) dx}$ で定義されるCRが1であるとき連続式は満たされている。図6は図5の場合のCRの変化を示したもので、この図からも、特性曲線法は変化の急な流れに対してはやや誤差の大きくなることがわかる。



(記号, 計算条件は 図4と同じ)