II－8
管網解析に関する一、二の考察

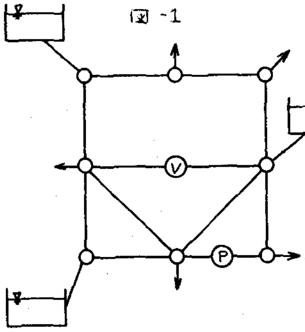
京都大学工学部　正員　岩佐　義朗
京都大学工学部　正員○綾　史郎
大阪ガス　　　　　　中島　規之

1. はじめに　我々は従来から、水路ネットワークをグラフ表示することにより、グラフの数学的表現である各種の行列を用いて、その水理解析法を定式化してきた。本報では、管網解析のうち、とくに一次近似による解法をとりあげ、そのいくつかを行列を用いて定式化するとともに、それらがいずれも連立一次方程式を解くことに帰着することから、連立一次方程式の解法の立場から、従来の管網解析法を検討しようとするものである。

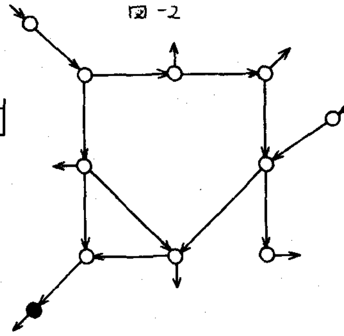
2. 管網のモデル化　管網の構成要素は、貯水池，管路，減圧弁，増圧ポンプの4種である。本報では、貯水池を水頭一定，減圧弁，増圧ポンプは流量一定のものとしてモデル化し，いずれも既知として扱かう。

節点として，貯水池(r個)，流出入点，分岐合流点(o個)を選び，枝として管路(p個)を選ぶ。前述のことより，弁，ポンプは流出入点におきかえられる。管網解析を行なうには、考えている管網の内外と，流出入流量がある(開いた系)として扱かう方法と、流出入流量がない(閉じた系)として扱かう二つの立場がある。開いた系の場合，管路網は節点数$n_0(=r+o)$個，枝数$e_0(=p)$個のグラフで示される。閉じた系の場合，第1の仮の枝(図－3で一点鎖線で示される。$e_1(=r-1)$個)と，第2の仮の枝(図－3で点線で示される。$e_2(=o-1)$個)を枝数に加えた$e_c(=e_0+e_1+e_2)$個の枝と，n_0個の節点数を持つグラフで管路網は示される。

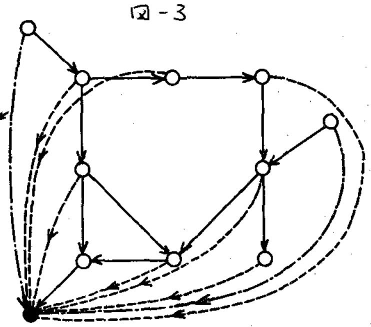
図－1



図－2



図－3



このそれぞれに対して，節点における流量の連続関係，節点間におけるエネルギーの関係，および枝における流量と損失の関係をまとめて記せば表－1のようである。表－1において、式は行列で表現されており，A，B，Cはそれぞれ接続行列，ループ行列，カットセット行列である。前述のことより表の左2欄と右欄とでは式の数が異なっている。いずれの方法でも、未知数と式数の関係より，節点数だけ変数を与えねばならないが，本報では，各節点において，全水頭(ϕ)，流出入流量(Qe)のいずれかが既知とする。

3. 一次近似にもとずく逐次計算法[1]の定式化

管網解析の変数は、管路流量(Q)，節点エネルギー位(亜)，管路のエネルギー損失(h_ℓ)，およびループ流量(f)である。この４つの変数のうち、いずれを才１の未知数として選ぶかによって、その解法は４種に大別される。それぞれに対して，近似値に対する補正量を与える式を示せば以下のようである。(Q_eのすべて、および亜の１つだけが既知の場合について示したが，その他の場合にも拡張は可能である。)

表－1

開いた系(Ⅰ)		閉じた系(Ⅱ)
トリー状管網(Ⅰ-1)	ループ状管網	
$A_0 Q_0 = Q_e$ (1-1)	$A_0 Q_0 = Q_e$ (1-1) $Q_0 = B_0^T Q_{01} + \begin{bmatrix} A_{01}^{-1} Q_e \\ 0 \end{bmatrix}$ (1-2)	$A_c Q_c = 0$ (1-3) $C_c Q_c = 0$ (1-4) $Q_c = B_c^T f$ (1-5)
A_0^T亜$= h_{\ell 0}$ (2-1)	A_0^T亜$= h_{\ell 0}$ (2-1) $B_0 h_{\ell 0} = 0$ (2-2)	A_c^T亜$= h_{\ell c}$ (2-3) $B_c^T h_{\ell c} = 0$ (2-4)
$h_\ell = RQ$ (3-1) $Q = K h_\ell$ (3-2)	——(線形化)——→	$\Delta h_\ell = R' \Delta Q$ (3-1') $\Delta Q = K' \Delta h_\ell$ (3-2')
$Q_0, h_{\ell 0}$, 亜		$Q_c, h_{\ell c}$, 亜, f

3－1. 管路流量を未知数とする解法

(1-1),(2-2),(3-1')を用いて、保野はⅠ－２の場合

$$\begin{bmatrix} A_0(n_0-1, e_0) \\ B_0(e_0-n_0+1, e_0)\, R'(e_0,e_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_0(e_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(n_0-1) - A_0(n_0-1, e_0)\, Q_0^{(1)}(e_0) \\ -B_0(e_0-n_0+1, e_0)\, R(e_0,e_0)\, Q_0^{(1)}(e_0) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

を与え，合田雄倉は(3－1)を$h_\ell = R'Q + G$と近似して解く方法を提案している。

3－2. 損失水頭を未知数とする解法

(3-1')のかわりに(3-2')を用いれば,3－1より

$$\begin{bmatrix} A_0(n_0-1, e_0)\, K'(e_0,e_0) \\ B_0(e_0-n_0+1, e_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_\ell(e_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(n_0-1) - A_0(n_0-1, e_0)\, K(e_0,e_0)\, h_\ell^{(1)}(e_0) \\ -B_0(e_0-n_0+1)\, h_\ell^{(1)}(e_0) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Ⅱの場合，(1－4)を用いれば、(5)はより簡単に記述される。

3－3. 節点エネルギー位を未知数とする解法

(1－1)，(2－1)，および(3－2')より得られる$\Delta Q_0 = K' A_0^T \Delta$亜 の関係より，常松，高桑らの方法に準じて次式を得る。

$$\left[A_0(n_0-1, e_0)\, K'(e_0,e_0)\, A_0^T(e_0, n_0-1)\right]\left[\Delta 亜(n_0-1)\right] = \left[Q_e(n_0-1) - A_0(n_0-1,e_0)\, K(e_0,e_0)\, A_0^T(n_0-1,e_0)\, 亜^{(1)}(n_0-1)\right] \qquad (6)$$

3－4. ループ流量を未知数とする解法

3－1の特別な方法と考えられ，Ⅰ－２の場合(1－2)，(2－2)，(3－1')を用いればよい。Ⅱの場合(1－5)，(2－4)の一部の式，および(3－1')を用いれば，

$$\left[B_{c1}(b, e_0)\, R'(e_0,e_0)\, B_{c1}^T(e_0, b)\right]\left[\Delta f(b)\right] = \left[-B_{c1}(b,e_0)\, R(e_0,e_0)\, B_{c1}^T(e_0,b)\, f^{(1)}(b)\right] \qquad (7)$$

$$b = e_0 + e_1 - n_0 + 1$$

4. 連立一次方程式の解法

(4)～(7)は連立一次方程式であり，未知数の数は(7),(6),(5)(4)の順に多くなっていく。((4),(5)の場合，行列のランクに着目すれば，(7)と同じにまで、元数を減らすことが可能である。)連立一次方程式の解法としては、逆行列を求める方法，掃き出し法のような直接法，およびガウス・ザイデル法のような反復法等種々のものがある。Hardy-Cross法は，(7)の係数行列の対角要素のみを用いて解く方法と考えることができ，連立一次方程式の一つの解法として位置づけられよう。また、(6),(7)の係数は，回路網理論では，点アドミタンス，ループインピーダンスと呼ばれ，係数行列の性質もある程度既知であり，連立一次方程式の解法の選択に際して示唆を与えるが，実際の計算例による比較は講演時に発表する。

[参考文献 (1)、たとえば，水理公式集 p.p. 394～397]