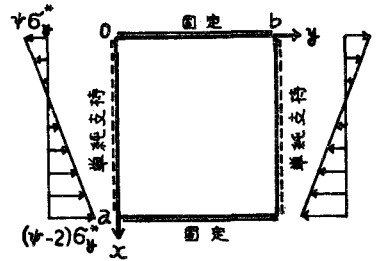


板の座屈後の挙動に関する研究 (第1報)

(株)神戸製鋼所 正員 森脇 良一
 正員 藤野 真之
 正員 滝本哲四郎

1. まえがき. 平板の座屈後の解析は, 薄板構造物の耐荷力を論じるうえで最も重要な解析のひとつと考えられる。従来, この分野の解析については, 有限要素法に代表される数値的解法, および Galerkin 法に代表される解析的解法などにより幾多の先駆的研究がある。本研究は後者の解析的解法に属するものである。従来の解析的解法による板の座屈後の解析は, 幾何学的境界条件としては周辺単純支持, 力学的境界条件としては単純圧縮を取り扱ったものがほとんどである。そこで本研究では, 従来未開拓であった載荷辺単純支持非載荷辺固定および周辺固定の幾何学的境界条件下で, 面内曲げおよびせん断等の力学的境界条件の板について, Galerkin 法を使って, 座屈後の解析を行なった。本報告はその第1報として, 載荷辺単純支持非載荷辺固定の板が面内曲げをうける場合について報告を行なうものである。

2. 基礎方程式. 第1図に示すような面内曲げをうける直交異方性板のためみ基礎方程式として, 次の(1)式および(2)式を考える。



第1図. 座標と境界条件

$$\begin{aligned}
 J_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2J_z \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + J_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\
 + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &\text{----- (1)} \\
 D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_z \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} \\
 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} &\text{----- (2)}
 \end{aligned}$$

ここで, $J_x = 1/E_y t$, $J_y = 1/E_x t$, $2J_z = \frac{1}{Gt} - \nu_x J_y - \nu_y J_x$, $D_x = E_x t^3 / 12(1 - \nu_x \nu_y)$, $D_y = E_y t^3 / 12(1 - \nu_x \nu_y)$, $2D_z = \frac{Gt^3}{3} + \nu_y D_x + \nu_x D_y$, w_0 は初期たわみ, w_1 は付加たわみ, t は板厚, ν はポアソン比, E および G は弾性定数, F は次式を満足させる Airy の応力関数である。
 $\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} / t$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} / t$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} / t$ ----- (3)

3. たわみ関数. Galerkin法を用いる場合, たわみ関数を如何に選ぶかは, 重要な点となる。本研究では, 載荷辺単純支持非載荷辺固定の幾何学的境界条件を,

$$x=0, a \text{ で } w_0 = w_1 = \partial w_0 / \partial y = \partial w_1 / \partial y = 0; \quad y=0, b \text{ で } w_0 = w_1 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0$$

とし, これに対応する w_0, w_1 を次式で与えられるとした。

$$w_0 = t \sum_m \sum_n a_{mn} f_m(x)_a \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad w_1 = t \sum_m \sum_n b_{mn} f_m(x)_a \sin \frac{n\pi}{b} y \text{----- (4)}$$

ここに, $f_m(x)_a$ は両端固定のためみ関数を示し, (5)式で与えられるものである。

$$f_m(x)_a = \cos \frac{m-1}{a} \pi x - \cos \frac{m+1}{a} \pi x \text{----- (5)}$$

関数 $f_m(x)_a$ の $m=1, 2, 3, 4$ に対する波形を第2図に示す。

4. 応力関数. 力学的境界条件を, 第1図に示すような面内曲げとした場合, 応力関数

Fは次式で与えられると可成りよい。

$$F = -\sigma_y^* t \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \psi \right) / a + t^2 \sum_{p,q} \phi_{pq} f_p(x) f_q(y) \quad (6)$$

ここに、 ϕ_{pq} は(1)式に w_0, w_1 および(6)式を代入して決定される a_{mn}, b_{mn} の2次多項式である。

5. 代数方程式. Galerkin法によつて、未知数 b_{mn} は、 w_0, w_1 および(6)式を次の(7)式に代入してえられる m 元連立3次方程式を解くことによつて決定される。

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_z \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right\} f_r(x) \sin \frac{s\pi}{b} y \, dx \, dy = 0 \quad (7)$$

6. 面外たわみと応力. (7)式の代数方程式が解かれて、 b_{mn} が求まれば、これを(4)式の各右辺に代入して w_1 が計算され、 w_1 と w_0 を加えることにより面外たわみの総量 w がえられる。

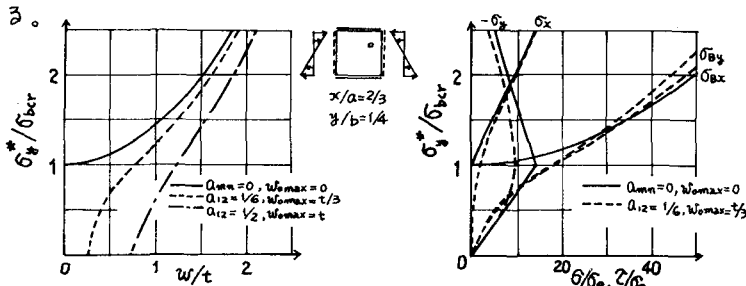
つぎに、膜応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ は(6)式を(3)式の右辺に代入したものに、 b_{mn} を代入することによつて計算される。また、面外たわみによる応力 $(\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_{bxy})$ は次式の各右辺に w_0, w_1 を代入することにより計算される。

$$\sigma_{bx} = 12 M_x z / t^3 \quad \sigma_{by} = 12 M_y z / t^3 \quad \tau_{bxy} = 12 H_{xy} z / t^3 \quad (8)$$

ここに、 $M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)$, $M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)$

$H_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$, z は板厚方向の座標を示す。

7. 解析結果. 本解析では、プログラム化の段階で w_0, w_1 を第3項($m=1, 2, 3; n=1, 2, 3$)までとし、(7)式で与えられる9元連立3次方程式の解をGauss-Seidel法によつて近似的に求めた。解析結果の1例として、等方性の正方形板が面内に純曲げ($\psi=1$)をうける場合の荷重と面外たわみおよび応力の関係を第3図に示す。なお、その他の結果は講演当日に発表する予定である。



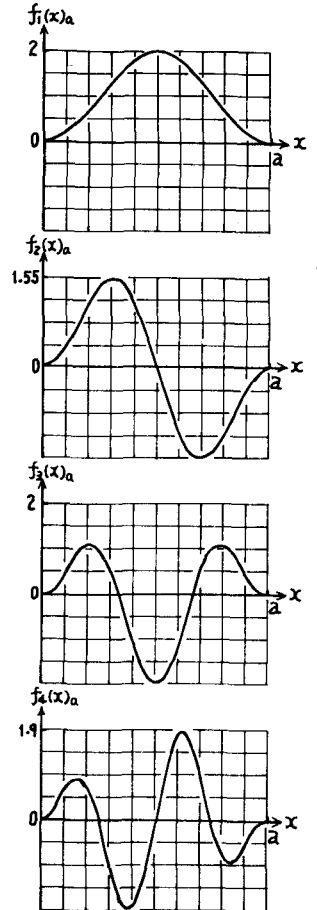
(a) 荷重と面外たわみの関係

(b) 荷重と応力の関係

第3図. 荷重と面外たわみおよび応力の関係($x/a=2/3, y/b=1/4$)

《参考文献》

S. Levy; "Bending of Rectangular Plates with Large Deflections", NACA Report no. 737, 1942
 N. Yamaki; "Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression", ASME, 1959
 小西一郎, 白石成人, 渡辺英一; "腹板の耐荷力に関する一考察", 土木学会論文報告集 第136号, 1966
 A. Mansour; "Post Buckling Behavior of Stiffened Plates with Small Initial Curvature under Combined Loads", M.I.T. Report no. 70-18, 1971



第2図. $f_m(x)/a$ の波形