

簡易要素による薄板の耐荷力解析

京都大学工学部 正員 山田 善一
 京都大学工学部 正員 渡辺 英一
 京都大学工学部 正員 横塚 雅実

1. まえがき

FEMによる薄板の非線形解析においては、多大な計算時間を要することがその実用化をはばんでいる。本研究は薄板を長方形要素および等価バネ要素によりモデル化し、前者には面外変位関数を、後者には等価バネ定数を適切に選ぶことによって、薄板の解析の簡易化を図るものである。

2. 簡易要素モデル(SEM)における仮定

長方形板要素の面外変位関数を次のように定義する。

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \quad (1)$$

これはFig. 1に示されるような双曲放物面を仮定したことになる。等質等方性を仮定すると板要素内の曲げおよび捩りによるひずみエネルギーは、それぞれ α_3 および $D(1-\nu)\alpha_3^2 ab$ と計算され要素内で一定となる。この点に着目して次に等価バネ要素を導入する。

板要素内で0となった曲げひずみエネルギーをうける等価曲げ剛性バネをFig. 2のように隣接する2枚の板要素中間に想定する。図のような変位に対応してバネにたくわえられるひずみエネルギー U_b^e は

$$U_b^e = \frac{1}{2} k_b \int_0^b (\theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1 y}{b})^2 dy = \frac{1}{6} \frac{b}{a} (\theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2) \quad (2)$$

となる。ここに θ_1, θ_2 は $w_1 \sim w_6$ の関数である。板においては $EI = D$ であるから曲げ剛性バネ定数を次のように定義できる。

$$k_{bx} = \frac{b}{a} D, \quad k_{by} = \frac{a}{b} D \quad (3)$$

さらに板要素内で一定の捩りによるひずみエネルギーをFig. 3のように周辺上の4個の等価バネに配分する。Fig. 3のような変位に対して4個の捩り剛性バネにたくわえられるひずみエネルギーは

$$U_t^e = \frac{D(1-\nu)}{2b} (w_1 - w_2 + w_3 - w_4)^2 \quad (4)$$

となり、このときバネ定数は次のように定義される。

$$k_{xz} = k_{xy} = D(1-\nu) \quad (5)$$

板要素における面内変位は(1)式と同様に仮定されるが、ここでは簡単のために要素内で一様かつ弾性的であるとする。また(1)式によって面外変位が仮定されると、外力の付す仕事は次のように計算される。面外分布荷重 q 、および面内線荷重 p_x に対してそれぞれ次式

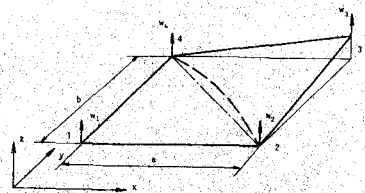
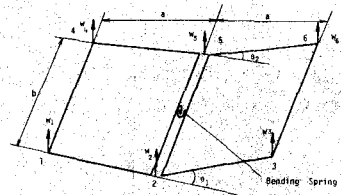


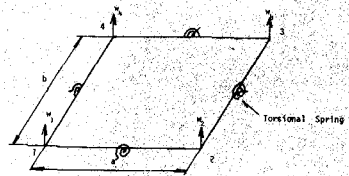
Plate Element

Fig. 1



Bending Spring Element

Fig. 2



Torsional Spring Element

Fig. 3

を用いる。

$$W_z = \iint q w dx dy, \quad W_x = \frac{p}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

3. SEMによる定式化

Fig. 4のような座屈問題においては、個々の要素に関与する未知節点変位 w に対して次式をうる。Fig. 1~3を参照して

$$\left\{ \frac{\partial U_{bx}}{\partial w_i} \right\} = \frac{k b x}{6 a^2} [B_x] \{w_i\}, \quad \left\{ \frac{\partial U_{by}}{\partial w_j} \right\} = \frac{k b y}{6 b^2} [B_y] \{w_j\}$$

$$\left\{ \frac{\partial U_T}{\partial w_k} \right\} = \frac{2 k x}{a b} [T] \{w_k\}, \quad \left\{ \frac{\partial W_x}{\partial w_k} \right\} = \frac{p}{6} \left(\frac{b}{a} \right) [W_x] \{w_k\}$$

($i, j = 1, 2, \dots, 6, k = 1, 2, \dots, 4$)

$$[B_x] = [B_y] = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \text{sym.} \\ -4 & 8 & & & & \\ 2 & -4 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & 2 & & \\ -2 & 4 & -2 & 4 & 8 & \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \text{sym.} \\ -1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & -1 & 1 & & \end{bmatrix} \quad [W_x] = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ -2 & 2 & & & & \\ -1 & 1 & 2 & & & \\ 1 & -1 & -2 & 2 & & \end{bmatrix}$$

これらのmatrixを与えられた境界条件のもとで全体にわたって重ね合せ、最小ポテンシャルエネルギーの原理式に従って未知変位 w を決定できる。また重ね合せの過程では Net work operatorが組織され、重ね合せが容易となる。

4. 計算例

i) 面外等分布荷重による

正方形板の最大たわみ

ii) 面内圧縮荷重による板の座屈問題

それぞれの計算結果を

Table 1および Fig 5に示す。

Table. 1 Deflectoin of Square Plate (S.S. x S.S.)

nxm	W (xqA ² /D)		
	SEM	FDM	Exact
2x2	0.00572	0.00391	0.00406
3x3	0.00402	0.00309	0.00406

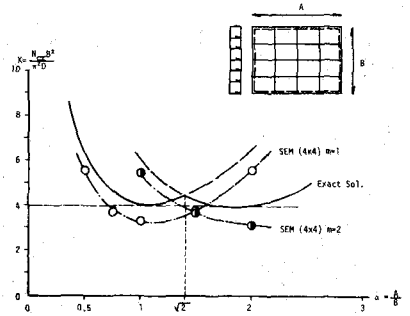
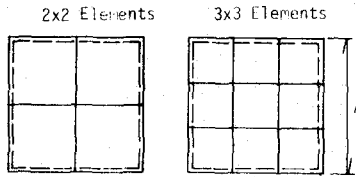


Fig. 5

5. 本法の特色

i) SEMは個々の板要素において変位関数を決定するため、基本的にはFEMに属し、FDMとは異なる。またFDMでは不明確であった物理的意味がSEMでは明らかとなっている。

ii) 曲げおよび捩りモーメントの評価が個々のバネ要素において可能なため、非線形挙動の解析が非常に簡素化される。

iii) 解への収束性は今後の研究課題となるが、分割数を増やすことによりFDMに劣らぬ収束が期待される。また分割の荒い場合はむしろFDMより有意義の解を得られる。

iv) 補剛材を等価バネ-剛棒系によってモデル化することにより補剛板の耐荷力解析へと発展できる。