

線形粘弾性地盤上の円板の解析

大阪市大工学部 正員 園田恵一郎
 " " 〇小林 治俊
 " 学生員 石尾 年光

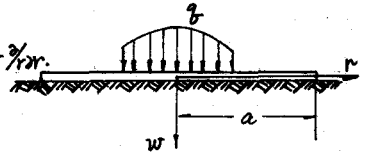
1 はじめに 本文は線形粘弾性挙動を示す基礎におかれた円板の軸対称曲げについて、粘弾性問題における「対応原理」と、円板の自由曲げ振動問題より導かれる固有関数を用いて解析を行ったものであり、2・3の数値計算例とともに報告する。

2 解法 「対応原理」によれば、求めようとする線形粘弾性問題の解は、これと同じ形状・境界条件をもつ弾性問題の解が見つかれば、その弾性解の中にある弾性係数を変換パラメーターを含む粘弾性係数でおきかえ、Laplaceの逆変換を施すことにより所望の粘弾性問題の解となるのである。従って本例においては、いわゆるWinkler基礎上の円板の解が利用出来るのであるが、従来¹⁾のように基礎の弾性係数(バネ係数 k)を一つみ込んだ引数をもつ関数による解ではLaplaceの逆変換が困難となり適用出来ない。本文では、これを円板の自由曲げ振動より導かれる固有関数から成る級数を用いて解決した。

2.1 固有関数によるWinkler基礎上の円板の解

基礎微分方程式: $D\Delta\Delta w + k_0 w = q$ ---- (1)

D : 板剛度, k_0 : 基礎のバネ係数, q : 分布荷重強度, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.



ための w と荷重 q を固有関数 $R_m(r)$ [表-1] により次式で表す。

$w = A/k_0 + \sum W_m R_m(r)$ ---- (2), $q(r) = \sum q_m R_m(r)$ ---- (3)

式(2)第1項は固定自由な場合の剛体変位項で、他の支持条件の場合には省かれる。 q_m は荷重形が与えられれば

定まる荷重展開係数: $q_m = \int_0^a q(r) R_m(r) r dr / \int_0^a R_m^2(r) r dr$ ---- (4)

未定定数 A 及び W_m は、系のポテンシャル Π を最小にする条件より次式となる。

$A = (2/a^2) \cdot \int_0^a q(r) r dr$, $W_m = q_m / \{ D (dm/a)^2 + k_0 \}$ ---- (5)

式(5)を式(2)へ代入すれば、ための式が得られ、基礎反力式は $p = k_0 w$ より得られる。

2.2 線形粘弾性基礎上の円板の解

「対応原理」に従って、粘弾性解にLaplace変換を施した式として次式を得る。

$\bar{w}(s) = \frac{\bar{A}(s)}{k_0(s)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{q}_m(s) R_m(r)}{D(dm/a)^2 + k_0(s)}$, $\bar{p}(s) = \bar{A}(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{k}(s) \bar{q}_m(s) R_m(r)}{D(dm/a)^2 + k_0(s)}$ ---- (6)

今、荷重 q が time-independent であるものとするれば、1(4)をステップ関数として、

$q(r, t) = q(r) \mathbf{1}(t)$, 従って $\bar{A}(s) = A/s$, $\bar{q}_m(s) = q_m/s$ ---- (7)

$\bar{k}(s)$ については、3種の粘弾性モデルに対して表-2に与えられているから、これら式(6)へ代入しLaplaceの逆変換を行えば所望の解が求められる。一例として、基礎がKelvinモデルで表わされる場合には $\bar{k}(s) = k_0(1 + \tau s)$ を用いれば各解式が次のように求められる。

$$w = \frac{A}{\rho_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m R_m(r)}{(dm/a)^4 + 1/K^4} \left\{ 1 - 1/\exp \left[1 + \left(\frac{dmK}{a} \right)^4 \right] \frac{t}{\tau} \right\}$$

$$p = A + \frac{1}{K^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m R_m(r)}{(dm/a)^4 + 1/K^4} \left\{ 1 + \left(\frac{dmK}{a} \right)^4 / \exp \left[1 + \left(\frac{dmK}{a} \right)^4 \right] \frac{t}{\tau} \right\}, \quad \tau = \tau_1 \quad K^4 = D/\rho_2$$

Maxwell, Standard Solid モデルの場合には、 τ も同様にして求められる。

表-1 固有関数 $R_m(r) = J_0(dm \frac{r}{a}) - \nu_m I_0(dm \frac{r}{a})$ と固有値 dm

周辺条件	ν_m	dm を与える特性方程式
固定	$J_0(dm)/I_0(dm)$	$J_1(dm)/J_0(dm) + I_1(dm)/I_0(dm) = 0$
単純支持	$J_0(dm)/I_0(dm)$	$J_1(dm)/J_0(dm) + I_1(dm)/I_0(dm) = 2dm/(1-\nu)$
自由	$J_1(dm)/I_1(dm)$	$J_0(dm)/J_1(dm) + I_0(dm)/I_1(dm) = 2(1-\nu)/dm$

(注) J_n, I_n は夫々 n 次 Bessel, 変形 Bessel 関数。 ν : 板の ν と
固有値 dm を与える公式は、 $dm = m\pi + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (8m\pi)^{-i}$ であり、 β_i
は各周辺条件の場合で異なり、列えば「周辺自由」で $\nu = 1/2$ のとき
 $\beta_1 = -5.6667, \beta_2 = 16.8889, \beta_3 = -242.8395, \beta_4 = -2296.8889, \dots$

3 数値計算例

一例として Kelvin モデル基礎上の周辺自由な円板で自由边上に線荷重が作用する場合につき計算を行ったものを図2, 図3に示した。 $\nu = 1/6, (K/a)^4 = (D/\rho_2)/a^4 = 2.259$ とした。 $t/\tau = 0$ において、たわみ・曲げモーメントは0であり基礎反力は荷重突下の値をもつが無限大となる。(図示しない。) 以後の挙動は、たわみ・曲げモーメントはゆるやかに収束し、基礎反力は急速に収束するようであるが、いずれも最終状態 ($t/\tau = \infty$) は Winkler 基礎上の円板の諸量に収束する。固有関数よりなる級数の収束性や他のモデルの場合については当日発表する。

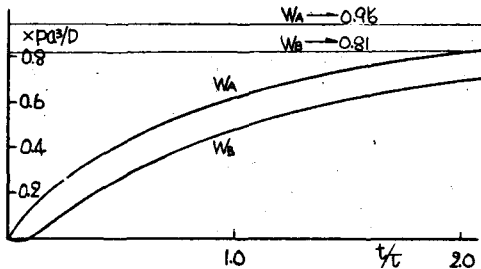


図3. 円板の中央及び縁のたわみ-時間曲線

表-2 粘弾性モデルと $\bar{\rho}_2(s)$

モデル	Kelvin	Maxwell	Standard Solid
等価回路			
τ	η/ρ_2	η/ρ_1	$\eta(\rho_1 + \rho_2)/\rho_1\rho_2$
$\bar{\rho}_2(s)$	$\rho_2(1 + \tau s)$	$\frac{\rho_1 \tau s}{1 + \tau s}$	$\frac{(\rho_1 + \rho_2)(1 + \tau s)}{1 + \rho_1/\rho_2 + \tau s}$

(注) ρ_1, ρ_2 : ばね係数 (kg/cm^3)

η : 粘性係数 ($\text{kg}\cdot\text{sec/cm}^2$)

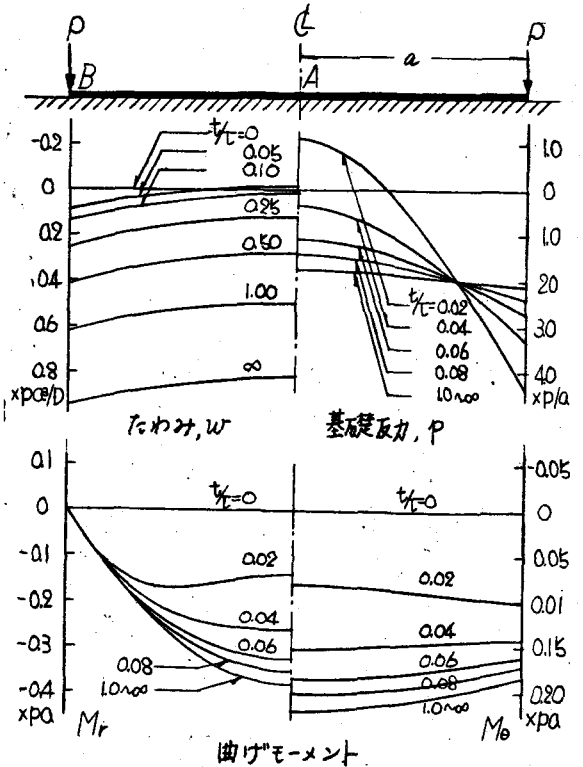


図2. Kelvin モデル基礎上の円板のたわみ・基礎反力・曲げモーメント

4 参考文献

- 1). Timoshenko, S.: Theory of Plates and Shells,
- 2). J.R. Airey: Vibration of Circular plate ..., Proc. of Physical Society, London, Vol. 23 (1911)
- 3). 園田・小林 石雄: 線形粘弾性基礎上の円板の解析, 土木学会論文集 247 (1976)