

初期たわみを有する扇形補剛板の解析

関西大学工学部	正会員	米沢 博
関西大学工学部	正会員	三上市 蔵
総合技術コンサルタント(株)	正会員	○新見 文彦

1. まえがき 最近の鋼構造物は、強肉化あるいは溶接の普及により初期たわみが不可避的なものとして発生する。この初期たわみを考慮して解析した例は、矩形板では数多くあるが、曲線箱桁などにみられる扇形板については、ほとんどないようである。ここでは初期たわみを有する扇形補剛板に、一様圧縮面内荷重が作用する場合の非線形挙動の解析を試みた。

2. 基礎微分方程式 図-1に示すように、扇形補剛板をそれと等価な極異方性扇形板に置換し、 $\theta = 0, \theta_0$ の両直線辺に一様圧縮面内荷重 N_0 が作用する場合を考える。初期たわみを有する極異方性扇形板の大たわみ理論に基づく基礎微分方程式は、つぎのようになる。

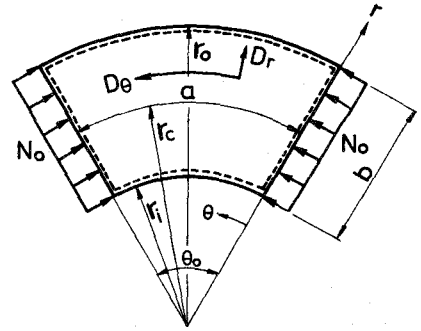


図-1

$$D_r(\bar{w}_{,rrr} + \frac{2}{r}\bar{w}_{,rr}) + 2H(\frac{1}{r^2}\bar{w}_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r}\bar{w}_{,r\theta} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta}) + D_\theta(-\frac{1}{r^2}\bar{w}_{,rr} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,r} + \frac{2}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta}) = D_r(\bar{w}_{,rrr} + \frac{2}{r}\bar{w}_{,rr}) + 2H(\frac{1}{r^2}\bar{w}_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r}\bar{w}_{,r\theta} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta}) + D_\theta(-\frac{1}{r^2}\bar{w}_{,rr} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,r} + \frac{2}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta}) + [E_r\{u_{,r} + \frac{1}{2}(\bar{w}_{,r}^2 - \bar{w}_{,\theta}^2)\} + E_t\{\frac{1}{r}(u+v_{,\theta}) + \frac{1}{2r^2}(\bar{w}_{,\theta}^2 - \bar{w}_{,r}^2)\}]\bar{w}_{,rr} + [E_r\{u_{,r} + \frac{1}{2}(\bar{w}_{,r}^2 - \bar{w}_{,\theta}^2)\} + E_\theta\{\frac{1}{r}(u+v_{,\theta}) + \frac{1}{2r^2}(\bar{w}_{,\theta}^2 - \bar{w}_{,r}^2)\}](\frac{2}{r}\bar{w}_{,r} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta}) + E_{r\theta}(v_{,r} + \frac{1}{r}u_{,\theta} - \frac{1}{r}v + \frac{1}{r}\bar{w}_{,r}\bar{w}_{,\theta} - \frac{1}{r}\bar{w}_{,\theta}\bar{w}_{,r}) - \frac{2}{r^2}\bar{w}_{,\theta} + \frac{2}{r^2}\bar{w}_{,r\theta} \quad (1)$$

$$-E_\theta \frac{u}{r^2} + E_r \frac{1}{r} u_{,r} - (E_\theta + E_{r\theta}) \frac{1}{r^2} v_{,\theta} + E_r u_{,rr} + (E_t + E_{r\theta}) \frac{1}{r} v_{,r\theta} + E_{r\theta} \frac{1}{r^2} u_{,\theta\theta} = (E_t - E_r) \frac{1}{2r} (\bar{w}_{,r}^2 - \bar{w}_{,\theta}^2) + (E_\theta + E_t) \frac{1}{2r^2} (\bar{w}_{,\theta}^2 - \bar{w}_{,r}^2) - (E_r \bar{w}_{,rr} + E_{r\theta} \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta}) \bar{w}_{,r} + (E_r \bar{w}_{,\theta,r} + E_{r\theta} \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta}) \bar{w}_{,\theta} - (E_t + E_{r\theta}) \frac{1}{r^2} (\bar{w}_{,r\theta} \bar{w}_{,\theta} - \bar{w}_{,\theta,r} \bar{w}_{,\theta}) \quad (2)$$

$$-E_{r\theta} \frac{v}{r^2} + (E_\theta + E_{r\theta}) \frac{1}{r^2} u_{,\theta} + E_{r\theta} \frac{1}{r} v_{,r} + E_{r\theta} v_{,rr} + E_\theta \frac{1}{r^2} v_{,\theta\theta} + (E_t + E_{r\theta}) \frac{1}{r} u_{,r\theta} = -(E_t + E_{r\theta}) \frac{1}{r} (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta} - \bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,r}) - (E_\theta \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta} + E_{r\theta} \bar{w}_{,rr}) \frac{1}{r} \bar{w}_{,\theta} + (E_\theta \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta} + E_{r\theta} \bar{w}_{,rr}) \frac{1}{r} \bar{w}_{,r} - E_{r\theta} \frac{1}{r^2} (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta} - \bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,r}) \quad (3)$$

ここに D_r, D_θ は極異方性板の曲げ剛さ、 H は有効ねじり剛さ、 E_r, E_θ は板の伸び剛さ、 $E_t, E_{r\theta}$ はせん断剛さ、 \bar{w} は全たわみ、 u, v はそれぞれ r, θ 方向の変位である。なお式中のコンマの後の添字はそれによる微分を表わす。

3. 境界条件式 曲げに関しては全辺で単純支持されているものとする。膜作用に関しては曲線辺で r 方向および θ 方向の変位がゼロ、直線辺で膜せん断力 $N_{\theta r}$ がゼロおよび θ 方向膜力 N_θ が外力に等しいという条件を用いる。すなわちつぎのようになる。

(i) $r=r_0, \theta_0$ において $u=v=0$, (ii) $\theta=0, \theta_0$ において $N_\theta = -N_0, N_{\theta r} = 0$

4. 数値計算

1) 初期たわみ 初期たわみは板の中央点($r=r_0, \theta=\theta_0/2$)で最大となる半波形正弦関数で与えた。なお、その場合の最大値を w_0 とする。

2) 無次元量 計算の便宜上、つぎのような無次元量を用いて数値計算を行った。

$$\begin{aligned} \xi = r/r_0, \eta = \theta/\theta_0, \alpha = a/b, \bar{W} = w\sqrt{E_r/D_r}, W_0 = w_0\sqrt{E_r/D_r}, U = uE_r b/D_r, V = vE_r b/D_r, \bar{N}_0 = N_0 b^2/D_r, \\ \bar{N}_r = N_r b^2/D_r, \bar{N}_\theta = N_\theta b^2/D_r, \bar{N}_{r\theta} = N_{r\theta} b^2/D_r, \bar{M}_r = \{M_r b^3/D_r\}\sqrt{E_r/D_r}, \bar{M}_\theta = \{M_\theta b^3/D_r\}\sqrt{E_r/D_r}, \bar{M}_{r\theta} = \{M_{r\theta} b^3/D_r\}\sqrt{E_r/D_r} \end{aligned}$$

3) 計算方法 基礎微分方程式(1),(2)および(3)は非線形連立偏微分方程式であるので、解析的に解くことは困難である。そこで差分法と加速パラメータを用いた反復法によって解くことにした。ところで未知数は u, v, w の3種であり反復を行う場合、 w に対しては式(1)を解き、 u, v に対しては式(2),(3)を連立させて解く。なお、数値計算には θ 方向24分割、 r 方向3分割の分割数を採用した。

5. 数値計算結果と考察 図-2は θ 方向に補剛して $D_\theta/D_r=10$ の場合において、 $\alpha=1, \beta=0.98$ と $\alpha=1, \beta=0.5$ の場合の板中央点の荷重-たわみ曲線を示したものである。ここに、 $N_e = 4\pi^2 D_r/b^2$ である。そして、変向点がほぼ座屈荷重と一致するが、 $\beta=0.5$ の場合の方が座屈荷重が小さくなっていることがわかる。図-3,4は $D_\theta/D_r=10$ の場合と $D_\theta/D_r=1$ の場合の板中央の荷重-たわみ曲線も、 $\alpha=1, \beta=0.75$ と $\alpha=1.5, \beta=0.75$ の2種類の場合について示したものである。また、 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3$, 幅厚比 $b/h=60$ の等方性板において、黒丸は降伏応力 $\sigma_y=2400 \text{ kg/cm}^2$ の場合の弾性限界(板の任意点が最初に降伏する限界値)であり、この点以下で弾性理論が適用できる。白丸は $\sigma_y=6000 \text{ kg/cm}^2$ の場合の弾性限界である。

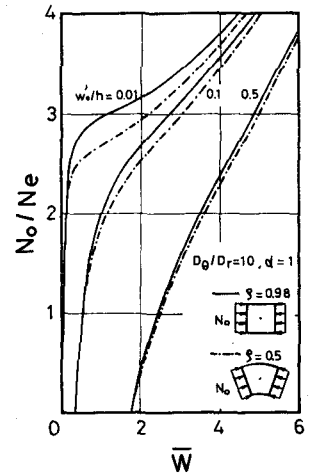


図-2

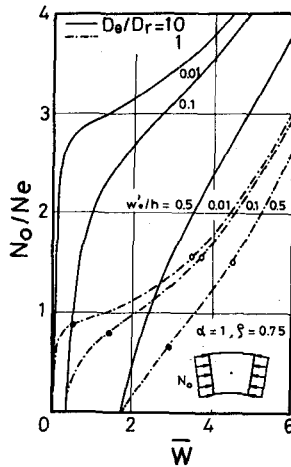


図-3

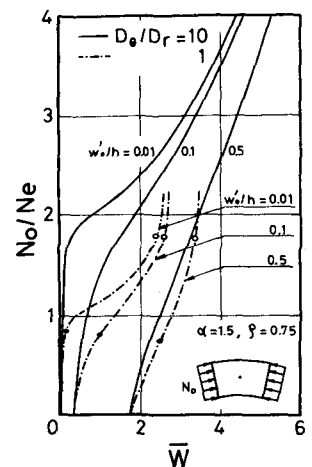


図-4

なお、初期たわみが大きくなるとこの弾性限界が下がることがわかる。 $w_0/h=0.01, 0.1$ の場合のたわみは非線形性が著しくあらわれているが、 $w_0/h=0.5$ の場合にはほぼ線形的に変化していることがわかる。 $\alpha=1$ の場合 $D_\theta/D_r=10$ の場合の座屈荷重は $D_\theta/D_r=1$ の場合のおよそ3倍に、 $\alpha=1.5$ の場合はおよそ2倍になり、たわみは補剛することによりかなり減少していることがわかる。