不整網目に対する差分式およびその平板解析への応用について

近畿大学理工学部　正員　谷平勉
近畿大学理工学部　○正員　宮崎平和

1．まえがき　平板の曲げ問題において、差分法は良く用いられているが、その適用において、板の平面形状・変厚形状等に制限を受けている。板の平面形状が長方形・平行四辺形・三角形・円形・扇形等の直交座標・斜交座標・極座標で容易に差分表示ができるものについては、数多くの研究が行なわれているが、図1に示すような任意な扇形や、境界辺が2次以上の関数で定義される形など、一般に網目が不整になるような形状の板についての研究は、数少ないようである。また、変厚板や直交異方性板になれば、基礎方程式が重調和方程式の形にならず、一般の偏微分方程式になり、差分法を用いるのに、通常の方法では容易ではない。そこで、本論文は以上のような差分法の不都合な面を解消するのに、注目するある1点において、周囲の有限個の点で2変数のテイラー展開を行ない、それに対して重みつき最小二乗処理をして得た連立1次方程式を解いて、$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}, f_{xxxx}, f_{xxxy}, f_{xxyy}, f_{xyyy}, f_{yyyy}$ の差分式を求めるという方法を用いた。この方法によれば、網目の形の如何にかかわらず $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, \cdots, f_{yyyy}$ の差分式を一度に求めることができるので、一般の偏微分方程式を差分式にする際にも、煩雑さが少なくなり、非常に便利である。また、曲げモーメント等を求めるのに、処理がしやすいという利点がある。

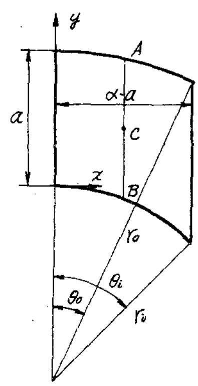


図1

2．任意点を使った差分式

注目する点$(0,0)$における、関数$f(x_i, y_i)$のテイラー展開式は、

$$f(x_i,y_i)=f(0,0)+\left(x_i\frac{\partial}{\partial x}+y_i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x}+y_i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x}+y_i\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0)+\frac{1}{4!}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x}+y_i\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(0,0)+\varepsilon \quad \text{------------}(1)$$

であり、いま、図2のような周囲のn個の点でテイラー展開を行い、fに関するs次の導関数の差分式を得るには、s次の項まで考慮すると、

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & \cdots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1, & 0, & 0, & \cdots, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(2)$$

$$(n \geqq m)$$

$s=2$ ； $m=5$, $f_1=f_x$, $f_2=f_y$, $f_3=f_{xx}$, $f_4=f_{xy}$, $f_5=f_{yy}$

$s=4$ ； $m=14$, $f_1=f_x$, $f_2=f_y$, $f_3=f_{xx}$, $\cdots\cdots$, $f_{14}=f_{yyyy}$

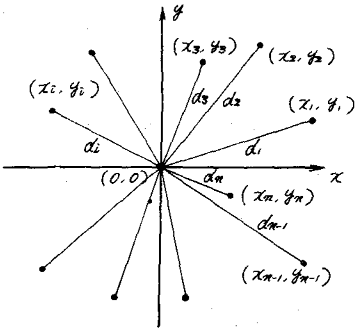


図2

で表わされる。i番目の式の誤差をδ_iとし、誤差の二乗(δ_i^2)に対して、重みη_iをつけると、誤差の二乗和Eは、　$E=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\cdot\delta_i^2$ --------(3)　である。この二乗和Eを最小にする$f_1, f_2, f_3, \cdots, f_m$　を決定するには、　$\partial E/\partial f_j=0$　$(j=1,2,3,\cdots,m)$ -------(4)　をm元連立方程式として解けば良い。

3. 平板の曲げに対する適用

本論文においては、等厚任意扇形板に対して、前節の手法を適用する。　等厚板の基礎方程式 $\Delta\Delta w=q/D$ ----(5) において、$\Delta w=v$とおけば、(5)式は、　$\Delta v=q/D$　,　$\Delta w=v$ --------(6)　となり、各点のΔwの差分式を求めておけば、自由辺を除いては処理がしやすい。

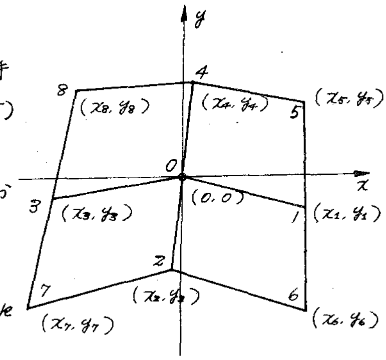


図 3

i). 一般内点　　図3に示すように、周囲の8個の点で、テイラー展開を行ない、前節の方法において、$\eta_i=1/(d_i)^k$ -------(7)　として、$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, \Delta f$　の差分式を求める。

ii). 単純支持辺　　図4に示すような周囲の5個の点で、テイラー展開を行って得た(2)式の、$n+1$行目に、$\Delta w=0$の境界条件式を加えて、最小二乗法により得た5元の連立方程式を解いて、境界条件より$w_0=w_1=w_3=0$とおけば、$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$　の差分式が求まる。

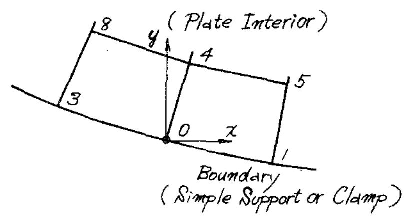


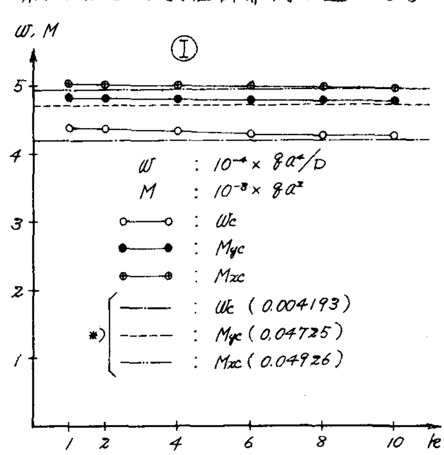
図4

iii). 固定辺　　単純支持辺と同様に、周囲の5個の点でテイラー展開を行って得た(2)式に、$f_x=f_y=0$　の境界条件を入れ、最小二乗法により得た3元の連立方程式を解いて、境界条件より$w_0=w_1=w_3=0$とおけば、$f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, \Delta f$　の差分式を得る。

iv). 自由辺　　発表当日に解析方法と、自由辺を持つ板の2・3の数値計算例を述べる。

4. 数値計算例

①図1の全周単純支持板に、等分布荷重が載荷した場合　$(\nu=0.3, \alpha=1.0, \theta=45°$, 分割数 $M=N=10)$



②図5の全周単純支持板に、等分布荷重が載荷した場合
$(\nu=0.3, \alpha=1.0, \theta=30°, k=10, M=N=10)$

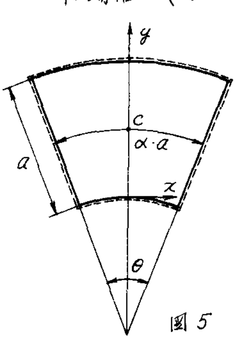


図5

	$w_c(qa^4/D)$	M_{yc}(** ***: M_{rc}) (qa^2)	M_{xc}(** ***: $M_{\theta c}$) (qa^2)
本解法	0.00404	0.0369	0.0360
*	0.00403	0.0369	0.0359
**	0.004037	0.03691	0.03575
***	0.004037	0.03732	0.03598

*　倉田・谷平；面内力を受ける変厚四辺形板の数値解析, 昭和49年度関西支部学術講演概要
** H. Otsuka ; Finite Difference Analysis of Circular Ring Plates Supported by Edge-Beam, Proc. of. JSCE, No. 220, 1973
*** 芳村；曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文報告集, No. 82, 1962