グラフ理論によるFlexibility Matrixに関する一考察

京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　谷口健男
石川島播磨重工業　正員 ○山下恵治

まえがき

構造解析においてはマトリックス代数の概念を用いたマトリックス構造解析が電子計算機の使用に適している，マトリックス構造解析では現在汎用性に富む変位法が主流となっているが応力法もその特性を生かすことにより充分有用なものとなる。

応力法で用いられるFlexibility Matrixは静定基本系の選定の仕方によって異なり，またその逆行列を求める必要があることからよい状態のFlexibility Matrixが得られる静定基本系を設定することが解析上有利である。本研究では骨組系を静定化するために断面力を解除する手段としてカットを導入し，静定系として得られる数多くの樹状構造物のなかでそのFlexibility Matrixの非零要素数を最小化することを目的とする一つの手法を提案する。

Flexibility Matrixの最適化手法の提案

静定基本系を設定するために必要な応力解除の方法としてはヒンジ，スライド，カットがある。このなかでカットは他に比較してつぎのような利点をもつといえる。

(1) 骨組系を静定化するために導入しなければならないレリーズの個数が平面構造の場合他のレリーズの3分の1，立体構造の場合6分の1でよい。

(2) レリーズを導入した系の安定性を判断することが容易である。

(3) Flexibility Matrixの非零要素が少なく，これを適当に配列することにより行列を帯状とすることが可能であり，従ってこのことは逆行列演算を行なうために有利な条件となる。

(4) 静定化された系が樹状構造であるため解析を自動的に行なうことが可能である。

骨組系を静定化するために考えられるカットの組み合わせすなわち可能な樹状構造は一般に数多く存在するがそのおのおの場合のFlexibility Matrixの非零要素数は異なる。また静定基本系として設定したある樹状構造物に対して得られるFlexibility Matrixの要素に関してそれらの値が零であるか非零であるかを判別するためには系のもつ物理量は不必要で系の位相幾何学的特性のみをもって判別することが可能であり，従って骨組系を一つの連結グラフと考えてもよい。

本手法はグラフ理論を応用したものであり，Flexibility Matrixの非零要素数が最小となる樹状構造を一意的かつ自動的に選定するアルゴリズムである。以下において本手法の概略を説明する。

骨組系に一つの連結グラフを対応させ，このグラフにおいて可能なすべてのTree（樹状構造物に相当するもの）を考える。このときにもこのグラフのある線（部材）に注目すれば，この線がすべてのTreeのうちのいくつかのTreeを生成する線となっているわけでありこの線が存在するTreeの個数をこの線に与えられる頻度とする，ここで5つの理論を述べこれを基にした手法の手順を示す。

（理論Ⅰ）　頻度の多い線をカットし，頻度の少ない線をカットしないことがFlexibility

Matrix の非零要素数を減少させることになる。

（理論Ⅱ）　グラフGの任意の線の両端点をijとし　線ijを除去したグラフをG^{ij}，グラフG^{ij}におけるTreeの総数をG^{ij}_Tと表わすとG^{ij}_Tの値が小さい線に対してカットを与えることが頻度の多い線にカットを与えることに一致する。

（理論Ⅲ）　可能なTreeの総数は骨組系をグラフに置換しそのインシデンス行列$\mathbb{A}$を用いることによって次式で得られる。

$$\text{Tree の総数} = \det(\mathbb{A}^T\mathbb{A})$$

（理論Ⅳ）　骨組系を静定にするために必要なカットの個数αは部材数M，節点数Vとすると次式で与えられる。

$$\alpha = M - V + 1$$

（理論Ⅴ）　カットを与えた系が安定であるかどうかという判別はインシデンス行列を使用して次のように行なわれる。

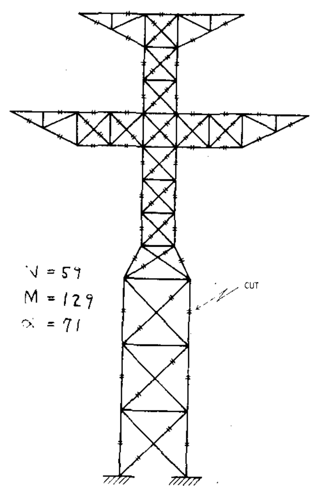
$$\text{if}\quad \det(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) = 0 \;\cdots\cdots\; \text{不安定（分離グラフ）}$$
$$\neq 0 \;\cdots\cdots\; \text{安　定（連結グラフ）}$$

〈手順1〉　すべての線に対してG^{ij}_Tを求める。

〈手順2〉　G^{ij}_Tの一番小さい線に対してカットを与える。

〈手順3〉　〈手順2〉によって得られた系が安定かどうかをチェックし，安定である場合にはこれにあたる線をカットする。また不安定である場合にはカットした線ijを再接続し〈手順2〉へもどる。

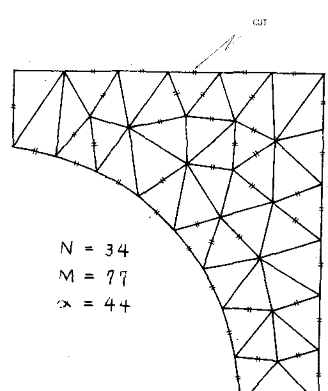
〈手順4〉　カットの個数がαになったかどうかをチェックし，αにならない場合〈手順2〉へ，αになった場合このプログラムは終了する。



（図　1）

あとがき

本手法を適用して得られたカットの組み合わせを図1，図2に示す。この論文ではレリーズの手段としてカットのみを使用するとFlexibility Matrixが系によっては擬特異となることがあり，このような場合には部分的にヒンジを導入して静定基本系を作成することが有効であると考えられる。なお本手法はref. 1に提案されている手法と双対関係にあり，本手法の妥当性を示す一つの傍証となる。



（図　2）

ref. 1　C. H. Goodspeed and M. Martin, "Conditioning of Structural Flexibility Matrix", Associated Member, ASCE. August 1974.

ref. 2　A. C. Cassell and J. C. de C. Henderson, "Cycle Bases for the Flexibility Analysis of Structures", International Journal for Numerical Method in Engineering. Vol. 8, 1974.