トンネル切羽周辺の三次元応力状態

京都大学工学部　正員　丹羽義次
〃　〃　正員　小林昭一
〃　〃　正員　○福井卓雄

近年における交通網の開発においては，交通手段の高速度化，大型化に伴なって，路線の短絡，騒音，振動など周辺環境への影響の回避，保守性などの点から，路線の多くの部分がトンネルになる場合が多い。いきおい，地質環境の良くない場所にトンネルを通すことが多くなり，施工上数々の困難を伴うことが少なくない有様である。トンネル施工上問題が生ずるのは，多く切羽付近においてであり，まず，切羽付近の応力の状態を知ることが，それらの問題の性質を把握し，対策を講じるために必須であると思われる。

有限要素法（FEM）出現以来，トンネル周辺地山の応力解析にはFEMが多く用いられているようであるが，2次元的な解析においては，FEMはその有用性を発揮し得るものの，3次元的な解析において，FEMにより十分な解析結果を得ることは，現在の電子計算機では非常に困難である。一方，積分方程式法では未知量を対象物の境界上においてのみ考慮するので，特にトンネル等を対象とする外部境界値問題の取り扱いにおいて有利である。本報告では，トンネル切羽周辺の応力状態を積分方程式法により，3次元的に解析することを試みる。

積分方程式法

まず，問題を等方等質弾性体の外部応力境界値問題として記述しておく。与えられた領域 D およびその境界 ∂D において，変位 $\underset{\sim}{u}$ について，境界値問題は次のようになる。

$$L^2\underset{\sim}{u}(x) \equiv \mu\left\{\nabla^2\underset{\sim}{u} + \frac{1}{1-2\nu}\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u})\right\} = 0 \qquad x \in D.$$

$$\underset{\sim}{t}(x) = \underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{\tau}(x) \equiv \mu\,\underset{\sim}{n}\cdot\left\{\frac{2\nu}{1-2\nu}(\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{u}\underset{\sim}{\nabla}\right\} \qquad x \in \partial D \tag{1}$$

ここに，μ，ν はせん断弾性定数およびポアソン比，$\underset{\sim}{\tau}$ は応力テンサー，$\underset{\sim}{n}$ は境界の外向き単位法線ベクトル，$\underset{\sim}{t}$ は境界上で与えられた応力ベクトルである。

周知のように，弾性学における積分方程式法は，境界上の変位 $\underset{\sim}{u}$，応力ベクター $\underset{\sim}{t}$ による内部変位の表現式である，Somigliana の公式を基礎としている[1]。ここでは，外部応力境界値問題に限っているので，積分方程式構成のためには，境界 ∂D もしくは，その内側にとった仮想境界 ∂S 上に分布した一重層密度 $\underset{\sim}{\varphi}$ による変位の表現式を用いることにする。

$$\underset{\sim}{u}(x) = \int_{\partial D \text{ or } \partial S} \underset{\sim}{G}(x;y)\cdot\underset{\sim}{\varphi}(y)\,dS_y \qquad x \in D,\ y \in \partial D \text{ or } \partial S. \tag{2}$$

ここに，$\underset{\sim}{G}(x;y)$ は Kelvin 解であり，

$$\underset{\sim}{G}(x;y) = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{1}{r}\underset{\sim}{1} - \frac{1}{4(1-\nu)}\underset{\sim}{\nabla}(\underset{\sim}{\nabla}r)\right\} \tag{3}$$

式(2)を用いて、一重層密度 φ を未知関数として積分方程式が次の様に得られる。

$$\underline{t}(x) = \int_{\partial S} \underline{n}\cdot \underline{T}(x;y)\cdot \varphi(y)\, dS_y$$

$$\underline{t}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_{\partial D} \underline{n}\cdot \underline{T}(x;y)\cdot \varphi(y)\, dS_y \qquad (4)$$

ここに、$\underline{T}(x;y)$ はKelvin解に対応する応力である。

数値的に解を得るためにはまず、境界をM個の境界要素に分割し、さらに各要素 ∂D_m においてKm個の代表点 $x_1, \cdots, x_{K_m}$ をとって、補間関数を次の様に定義する。

$$f^{(m)}_{\alpha}(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha=1}^{K_m} f^{(m)}_{\alpha}(x) = 1 \quad x \in \partial D_m, \qquad f^{(m)}_{\alpha}(x) = 0 \quad x \notin \partial D_m$$

この補間関数を用いて、密度を $\varphi(x) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{\alpha=1}^{K_m} \varphi^{(m)}_{\alpha} f^{(m)}_{\alpha}(x)\ (\varphi^{(m)}_{\alpha} \equiv \varphi(x_\alpha))$ と近似すれば、上の方程式の右辺の積分は

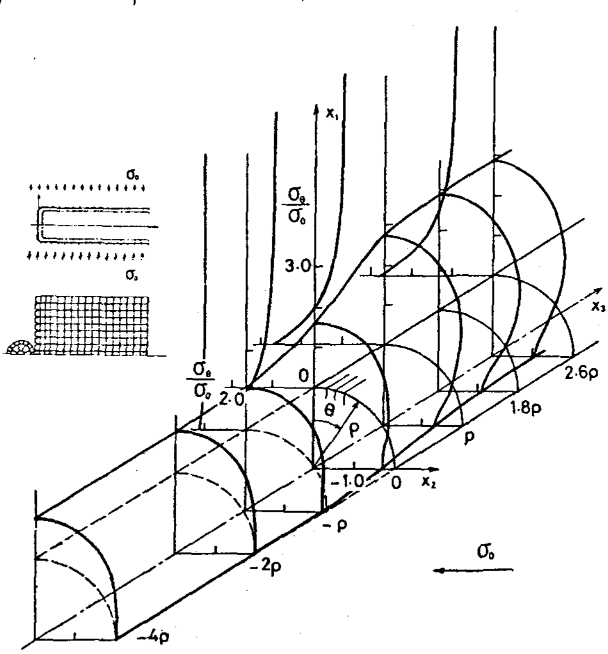
$$\int \underline{n}\cdot \underline{T}(x;y)\cdot \varphi(y)\, dS_y \simeq \sum_{m=1}^{M}\left\{\sum_{\alpha=1}^{K_m}\left[\int_{\partial D_m} \underline{n}\cdot \underline{T}(x;y)\, f^{(m)}_{\alpha}(y)\, dS_y\right]\cdot \varphi^{(m)}_{\alpha}\right\} \qquad (5)$$

と近似され、積分方程式は近似的に代数方程式で置き換えられることになる。

最も簡単に、密度を階段関数で近似すれば、方程式 $(4)_2$ は次の様になる。

$$\underline{t}(x_n) = \sum_{m=1}^{M}\left\{\frac{1}{2}\varphi^{(m)}\delta_{mn} + \left[\int_{\partial D_m} \underline{n}\cdot \underline{T}(x_n;y)\, dS_y\right]\cdot \varphi^{(m)}\right\} \qquad (6)$$

解析例　円形トンネルの切羽付近における応力分布。　円柱座標系 (r,θ,z) を z 軸をトンネル軸に一致するようにえらび、切羽面を $z=0$ にえらんだとき、軸に直角な方向の一様応力場による、$r=\rho$（トンネル半径）面の円周方向応力 σ_θ およびその集中の様子を図に示す。ポアソン比は0.25とした。切羽の存在による3次元的な応力分布の範囲は、ほぼトンネル直径程度の幅に限られていることがわかる。すなわち、切羽前方 2ρ あたりより、応力状態はほぼ一様となり、切羽後方 2ρ 程度では、2次元的な応力分布となっている。本例では、積分境界を境界から 0.1ρ 離しており、各要素による影響係数は、要素上でシンプソン則により近似積分して求めている。要素数は297であり、問題の対称性を考慮して、トンネル表面の1/4のみ考えている。



[1] 丹羽他、土木学会論文報告集、195号、pp.27-35、