

内部に集中力を受ける半無限異方性体の解析解

東洋技研コンサルタント(株) 正員 島田 功

1. まえがき; 3次元異方性体の研究として, 鉛直軸に關し対称性を持つ直交異方性体の表面に鉛直集中力が作用した場合の *Michell*¹⁾ の解, また, その特別な場合の *Wolf*²⁾ の解(ポアソン比が0), *Barden*³⁾ の解(*Michell* の解をもとに, 水平応力を近似的に求めた。)がある。しかし, これらの研究は, 表面荷重による応力伝播に關するものであり, 等方弾性体の *Mindlin*⁴⁾ 解に相当する, 内部に集中力が作用した異方性体の解は, 筆者の知見では, ないようである。本研究は, *Michell*¹⁾ の誘導した微分方程式をもとに, 図-1 に示す位置で, 特異点を持つ解を重ね合わせることにより, 鉛直軸に關し対称性を持つ半無限直交異方性体の集中力問題(図-2)の解を求め, 若干の解析例を示したものである。本解析解において, $d_0=0$ とすれば表面荷重の解となり, $d_0=\infty$ とすれば, 無限体の解となる。

2. 基礎式: 軸対称異方性体の応力-ひずみ関係は, 5つの弾性定数($a_{11}, a_{13}, a_{33}, a_{44}, a_{55}$)によって, 次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \epsilon - 2a_{44} \epsilon_y + (a_{13} - a_{11}) \epsilon_z, & \tau_{xy} &= a_{44} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= a_{11} \epsilon - 2a_{44} \epsilon_x + (a_{13} - a_{11}) \epsilon_z, & \tau_{yz} &= a_{55} \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= a_{13} \epsilon + (a_{33} - a_{13}) \epsilon_z, & \tau_{zx} &= a_{55} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \text{ただし } \epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1)$$

また, 釣合方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - 2a_{44} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} + (a_{13} - a_{11}) \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} + a_{44} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + a_{55} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ a_{11} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - 2a_{44} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + (a_{13} - a_{11}) \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + a_{55} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ a_{13} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + (a_{33} - a_{13}) \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} + a_{55} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)を微分し, 少しの操作により, 次の軸対称異方性体の基礎式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } \xi_1 &= \epsilon + \gamma_1 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \xi_2 = \epsilon + \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \xi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_1 &= \frac{a_{55} + P_1(a_{13} + a_{33})}{a_{11}}, \quad \gamma_2 = \frac{a_{55} + P_2(a_{13} + a_{33})}{a_{11}}, \quad \gamma_3 = \frac{a_{55}}{a_{44}} \\ P_1, P_2 &= \frac{1}{2a_{55}(a_{13} + a_{33})} \left[-2a_{55}(a_{13} + a_{33}) - a_{13}^2 + a_{11}a_{33} \pm \left\{ (a_{13} - a_{11}a_{33})(a_{13} - a_{11}a_{33} + 4a_{44}a_{55}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4a_{44}^2 \right\}^{1/2} \right] \\ q_1 &= (a_{55} + a_{13} - a_{11} + P_1 a_{33}) / a_{11}, \quad q_2 = (a_{55} + a_{13} - a_{11} + P_2 a_{33}) / a_{11} \end{aligned}$$

半無限体表面の境界条件 ($\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) $_{z=0} = 0$ を (ξ_i) $_{z=0}$ で表現すれば,

$$(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2)_{z=0} = 0, \quad (\alpha \frac{\partial \xi_1}{\partial z} + \beta \frac{\partial \xi_2}{\partial z})_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4)$$

$$\text{ただし, } \alpha = a_{13}(1 + \gamma_2) - a_{33}, \quad \beta = -a_{13}(1 + \gamma_1) + a_{33}$$

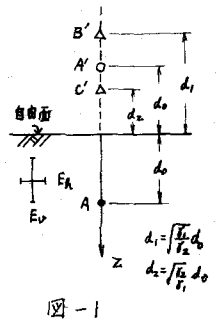
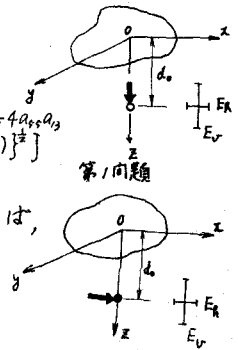


図-1



第1問題
第2問題
図-2

1) *Michell, J.H.*: The stress Distribution in an Aelotropic Solid with Infinite Boundary Plane, *Proc. London Math Soc.*, Vol.32 (1900)
 2) *Wolf, K.*; *Z.A.M.M.*, Vol.15 (1935)
 3) *Barden, L.*; *Geotechnique*, Vol.13, No.3 (1963)
 4) *Mindlin, R.D.*; *Physics*, Vol.7 (1936)
 5) 岡村, 島田, 森; 直交異方性半無限体の非軸対称荷重の解析, 土木学会学術大会報告集工. (S.49)

3. 集中力問題の解析解

3-1, 内部に鉛直集中力(P)が作用する解(第1問題); 点 $z=d$ に特異点をもつ, 本問題の解は, $\xi_i = A_i \frac{\partial}{\partial x} R_i$ ($i=1,2$), $\xi_3 = 0$ (軸対称性より) (5)

ただし, $A_i = \text{積分定数}$, $R_i = x^2 + y^2 + \frac{(z-d)^2}{\gamma_i}$

となり, これらの解を図-1のように重ね合せ, 式(4)の境界条件と, 集中力Pの条件により積分定数 A_i が定まる。変位成分の解を示せば次式となる。

$$u = -\frac{P}{4\pi a_{33}} \times \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \times \frac{x}{\gamma_0^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \frac{1+\beta_{i+1}}{\gamma_i} \left(\frac{z-d_{ij}}{R_{ij}} - \sqrt{\gamma_i} \delta_j \right), \quad w = \frac{P}{4\pi a_{33}} \times \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \frac{1}{R_{ij}} \quad (7)$$

ただし, $A_{11} = (1+\beta_1)\sqrt{\gamma_1}$, $A_{21} = -(1+\beta_2)\sqrt{\gamma_2}$, $A_{12} = \frac{\sqrt{\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}}}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}} A_{11}$, $A_{22} = -\frac{\sqrt{\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}}}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}} A_{21}$ } (7)

$A_{13} = \frac{P\beta_1}{4\pi a_{33}} \times \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_0}} \frac{2(1+\beta_2)}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}}$, $A_{23} = \frac{P\beta_2}{4\pi a_{33}} \times \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_0}} \frac{2(1+\beta_1)}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}}$, $\beta_3 = \beta_1$

$\gamma_0^2 = x^2 + y^2$, $R_{ij}^2 = \gamma_0^2 + \frac{(z-d_{ij})^2}{\gamma_i}$, $d_{11} = 0$, $d_{21} = d_3 = 1$, $d_{12} = -d_{22} = d_0$, $d_{13} = \sqrt{\gamma_2} d_0$, $d_{23} = \sqrt{\gamma_1} d_0$ (8)

3-2, 内部に水平集中力(T)が作用する解(第2問題); 点 $z=d$ に特異点をもつ 本問題の解は, $\xi_i = B_i \frac{\partial}{\partial x} R_i$ ($i=1,2$), $\xi_3 = B_3 \frac{\partial}{\partial y} R_3$ (9)

3-1と同様にして, 積分定数 B_i ($i=1,3$) を定め, 変位成分の解を示せば次式となる。

$$u = \frac{T}{4\pi(\alpha\beta_1 + \beta\beta_2)} \times \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \times \frac{1}{\gamma_0^2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 B_{ij} \frac{1+\beta_{i+1}}{\gamma_i} \left\{ x^2 \frac{(z-d_{ij})^2}{\gamma_i} - y^2 R_{ij}^2 - (x^2 - y^2) \frac{z-d_{ij}}{\sqrt{\gamma_i}} R_{ij} \delta_j \right\} \frac{1}{R_{ij}} \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^3 B_{3j} \left\{ x^2 R_{3j} - y^2 \frac{z-d_{3j}}{\gamma_3} - (x^2 - y^2) \frac{z-d_{3j}}{\sqrt{\gamma_3}} R_{3j} \delta_j \right\} \frac{1}{R_{3j}} \right]$$

$$v = \frac{T}{4\pi(\alpha\beta_1 + \beta\beta_2)} \times \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \times \frac{xy}{\gamma_0^2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 B_{ij} (1+\beta_{i+1}) \left\{ \gamma_0^2 - 2(R_{ij} - \frac{z-d_{ij}}{\sqrt{\gamma_i}} \delta_j) R_{ij} \right\} \frac{1}{R_{ij}} \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 B_{3j} \left\{ \gamma_0^2 - 2(R_{3j} - \frac{z-d_{3j}}{\sqrt{\gamma_3}} \delta_j) R_{3j} \right\} \frac{1}{R_{3j}} \right] \quad (10)$$

$$w = \frac{T}{4\pi(\alpha\beta_1 + \beta\beta_2)} \times \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \times \frac{x}{\gamma_0^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 B_{ij} \left(\frac{z-d_{ij}}{R_{ij}} - \sqrt{\gamma_i} \delta_j \right)$$

ただし, $B_{11} = \sqrt{\gamma_1} \beta_2$, $B_{21} = -\sqrt{\gamma_2} \beta_1$, $B_{31} = B_{32} = (\alpha\beta_1 + \beta\beta_2) (\beta_1 - \beta_2) \frac{\sqrt{\gamma_3}}{4\pi a_{33}}$, $B_{12} = -\frac{\sqrt{\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}}}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}} B_{11}$ } (11)

$B_{13} = \frac{\sqrt{\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}}}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}} B_{21}$, $B_{23} = \frac{P\beta_1}{4\pi a_{33}} \times \frac{2\sqrt{\gamma_2} \beta_1}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}}$, $B_{33} = -\frac{P\beta_2}{4\pi a_{33}} \times \frac{2\sqrt{\gamma_1} \beta_2}{\sqrt{\gamma_1-\sqrt{\gamma_2}}}$

4. 数値計算例; 応力-ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{ER} - \nu_{\beta R} & -\nu_{\beta R} E_R \\ \nu_{ER} - \nu_{\beta R} E_R & \nu_{\beta R} E_R \\ \text{対称} & \nu_{ER} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} / G_{\beta R} \\ \tau_{yz} / G_{\nu R} \\ \tau_{zx} / G_{\nu R} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし, $G_{\beta R} = \frac{E_R}{2(1+\nu_{\beta R})}$, $G_{\nu R} = \frac{E_R E_R}{E_R + E_R + 2\nu_{\nu R} E_R}$ (文献3)

において, $E_R = n E_R$, $\nu_{\beta R} = 0.2$, $\nu_{\nu R} = 0.2$ (ただし

$n < 1$ では, $\nu_{\nu R} = 0.2n$) として n の変化による応力の変化を図-3, 4

に示した。図-5は, 表面から $5a$ の位置に, 体積力 q (分布領域; $a \times a \times a$) が作用した場合の σ_z の分布を示したものであるが, 筆者は Mindlin 解を基底にした任意の異方性体を解析する手法により, 本例題を解析したので, 対比(○印)して示した。

5. あとがき; 紙面の都合で, 応力の式は省略したが, 変位 (前論文の手法による) (前論文の手法による) を微分して求めたひずみ, 式(1)に代入することにより, 各応力も容易に求められる。

