

積分方程式による熱伝導問題の解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次 同 正員 小林昭一
 同 正員 福井卓雄 同大学院〇学生員 原 利弘

1. はじめに

土木構造物において、熱の存在は熱応力を発生せしめ、変形、破壊、力学特性の変化に大きな影響を及ぼす。よって、与えられた条件下で構造物の温度分布を正確に把握することは、安全性及び耐久性の面においても非常に重要である。これまで拡散問題の解析手法として、フーリエ変換、ラプラス変換、差分法、さらには有限要素法など数多くの解析法が試みられて来たが、本研究では、拡散方程式を境界値問題として積分方程式に直し、適当なモデルを設定することにより、数値解析を試み、解析手法に検討を加えた。

2. 基本式と解析手法

境界 ∂D で囲まれた内部領域を D 、外部領域を \bar{D} 、 ∂D 上の外向き単位法線ベクトルを n とする。放射や発熱効果を考慮せず、初期温度が0の場合、座標 X 、時刻 t における温度を $u(X,t)$ 、基本特異解を $H(X,t;\xi,\tau)$ とすれば、放物型偏微分方程式は次のような積分方程式に帰着できる。

$$F(x)u(x,t) = \int_0^t \int_{\partial D} \left\{ H(x,t;\xi,\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - u(\xi,\tau) \frac{\partial H(x,t;\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \right\} d\xi d\tau \quad F(x) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ \frac{1}{2} & x \in \partial D \\ 0 & x \in \bar{D} \end{cases}$$

この式は、 $x \in \partial D$ の場合、境界上の $u(\xi,\tau)$ と $\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}$ に関する式で、境界上でどちらかが既知関数であれば、他の関数に対する積分方程式を構成し、これを解くことにより、 $x \in D$ でも容易に $u(x,t)$ を求めることができる。本研究では、実際に数値積分を行うに当り、空間軸、時間軸に対して、簡単でかつ一般的な中点近似法を採用し、上式を下に示すような連立方程式に直し、step by stepによって解法を試みた。

$$F(x_i)u(x_i, t_k) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^N \left[H(x_i, t_k; x_j, t_{l-\frac{1}{2}}) \left\{ \frac{\partial u(x_j, t_{l-\frac{1}{2}})}{\partial n_j} + \frac{\partial u(x_j, t_l)}{\partial n_j} \right\} - \frac{\partial H(x_i, t_k; x_j, t_{l-\frac{1}{2}})}{\partial n_j} \left\{ \frac{u(x_j, t_{l-\frac{1}{2}}) + u(x_j, t_l)}{2} \right\} \right] \Delta x_j \Delta t$$

3. 解析モデルと解析条件

(1)解析モデル 理論解の容易に求まる基本的な二次元モデルとして、図-1に示すような正方形モデルを設定した。これは、辺の長さ1の正方形を各辺とも5等分したもので、内部の5点、境界上の20点について、 $u(x,t)$ 、 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}$ をそれぞれ求めた。

(2)解析条件 物質は等方均質性とした。

- ・境界条件 $u(x,t) = 1$. (const) $x \in \partial D_1$
- $u(x,t) = 0$. (") $x \in \partial D_2$
- $\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = 0$. (") $x \in \partial D_3, \partial D_4$
- ・初期条件 $u(x,0) = 0$. (") $x \in D$

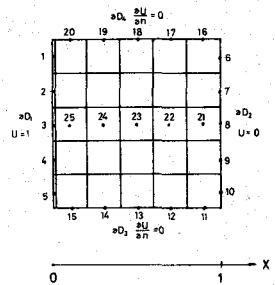


図-1 正方形モデル

4. 解析結果及び考察

時間間隔 $\Delta t = 0.01$ として 80 step まで解析を試みた。得られた $\partial D_1, \partial D_2$ での $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$ の値を図-2 に、 $\partial D_3, \partial D_4$ での $U(x,t)$ を図-3 に、D での $U(x,t)$ を図-4 に、また error 関数によって求められた理論解を図-5 に示す。図-5 より明らかな様に、理論的には与えられた条件下でこのモデルの温度分布は、ほぼ 50 step 以後において直線分布を示すようになり、同時に $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$ についても $\partial D_1, \partial D_2$ で共に -1 の値に収束し、熱の流出量と流入量が一致して定常状態が出現するものと考えられる。解析結果について言えば、図-3 に示すような境界上の $U(x,t)$ については、理論解と比べてほぼよい結果が得られたが、図-4 より内部の値は理論解を大きく下まわり、共に 50 step 以後も直線分布を示してはいない。また $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$ については step 数が増すにつれて次第に -1 に近づく傾向を示すが、50 step 以後も -1 には収束せず、特に 40 step 以後値が不安定になっている。以上述べたような結果が出た原因として次のようなことが考えられる。

- ・誤差の累積 この解析法が持つ不可避な問題点で安定性の問題とも関連し、step 数に比例して誤差が大きくなり累積される。
- ・基本特異解の特異性 基本特異解は時間軸、空間軸に対して特異点を持ち、ここでの積分近似が困難となる。
- ・不連続性 境界条件と初期条件が $t=0$ で不連続性を示す。よって step by step で解く場合これを解消するには連続関数での近似が考えられる。

現在以上の問題を検討中であり、得られた結果は当日発表する予定である。

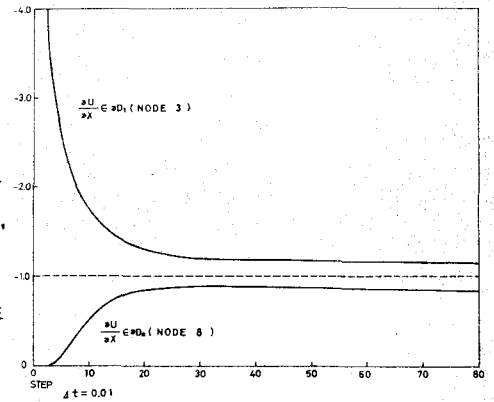


図-2. $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$ の解析値

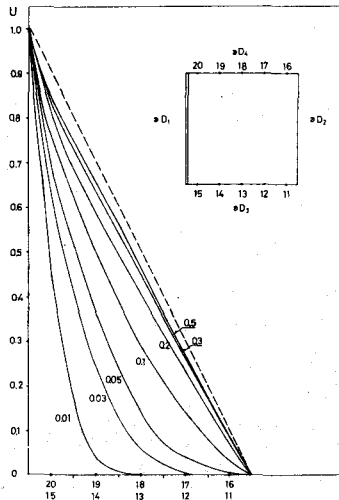


図-3 ∂D での解析値

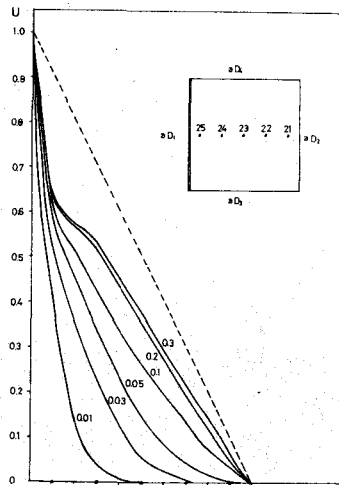


図-4 D での解析値

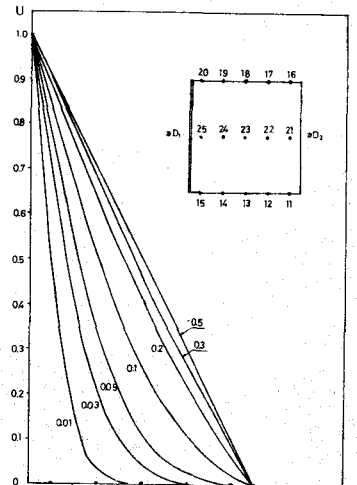


図-5 D, ∂D での理論解