I－3

積分方程式による固有振動の解析

京都大学工学部　正員　丹羽義次　　同　　正員　小林昭一
同　　正員　福井卓雄　　三井造船　正員○岡野伸一

1，はじめに

線形同次境界値問題に帰着され得る固有値問題に対して，積分方程式法が適用できるが，本報では特に平板の固有振動について解析を試みる。

平板の固有振動に関して厳密解が得られているものは，平板の形状および境界条件が限られた数種についてのみであり，これらは形状関数を変数分離する方法によっている。変数分離が困難な境界条件に対して，近似解法としてエネルギー法が用いられるが，このとき比較的次数の低い固有値のみが求まる。変数分離が不可能な形状の平板に対する一般的な解法としては，差分法あるいは有限要素法が挙げられるが，これらは平板全体を要素に分割するために，最終的には大次元の連立方程式に帰着される。これに比して，積分方程式法によれば，境界のみを要素に分割するために，連立方程式は小次元となり，計算時間と記憶場所あるいは精度の点で有利となることが予想される。

2，解法について

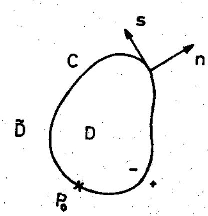

Fig. 1

平板の固有振動に関する基礎方程式は，鉛直変位 w を式(1)のように変数分離することによって式(2)のように変形される。ただし，M は板の占める領域 D 内の任意の点を示し，Δ はラプラスの微分演算子である。（Fig. 1）

$$w(M,t) = u(M)\cdot e^{i\omega t} \quad (1) \quad , \quad (\Delta^2 - \lambda^4)\,u(M) = 0 \quad (2)$$

境界条件は式(3)～式(6)から適当に選んだ2つによって表わされる。

$$\lim_{M\to P_0^-} u(M) = 0 \quad (3) \quad , \quad \lim_{M\to P_0^-} \partial_n u(M) = 0 \quad (4) \quad , \quad \lim_{M\to P_0^-} [\Delta - (1-\nu)\,\partial_s^2]\,u(M) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{M\to P_0^-} \partial_n \Delta u(M) + (1-\nu)\,\partial_s \lim_{M\to P_0^-} \partial_n \partial_s u(M) = 0 \quad (6)$$

ここに，P_0^- は平板の境界 C 上の点 P_0 への領域 D 内からの極限を示し，n と s はそれぞれに境界 C の単位法線と接線であり，∂_n と ∂_s はそれぞれ n 方向微分と s 方向微分を示す。式(5)は境界の裏側での曲げモーメント M_n が零であり，式(6)は等価せん断力が零であることを意味する。従って，固定支持の場合は式(3)と式(4)が，単純支持の場合は式(3)と式(5)が，そして自由端の場合は式(5)と式(6)が境界条件式となる。

基礎方程式(2)に対する基礎解 G は式(7)と式(8)の解として式(9)のように定まる。

$$(\Delta^2 - \lambda^4)\,G(M,P) = \delta_P(M) \quad (7) \quad , \quad \lim_{r\to\infty} (\partial_r G - i\lambda G) = O(r^{-3/2}) \quad (8)$$

$$G(\lambda r) = (i/8\lambda^2)\cdot[\,H_0(\lambda r) - H_0(i\lambda r)\,] \quad (9)$$

ここに，$\delta_P(M)$ は点 P において特異性を示すDiracの δ 関数であり，r は点 P から点 M への距離を示し，H_0 は第1種Hankel関数である。式(8)はSommerfeldの条件であ

り，無限遠点からの波の反射が存在しないことを示す。 基礎解 $G(M,P)$ は，無限板 $D\cup C\cup \bar{D}$ 上の点 P に $e^{i\omega t}$ の鉛直集中荷重を与えた場合の点 M での振幅を意味する。 また，$G(M,P)$ の点 P における n 方向微分 $\partial_{n(p)}G(M,P)$ は点 P に $e^{i\omega t}$ のモーメント荷重を与えた場合の点 M での振幅を意味する。 従って，無限板上の閉曲線 C 上で G と $\partial_n G$ をそれぞれに荷重密度 μ_1 と μ_2 で重ね合わせることによって，変位 u を次式で表わすことができる。

$$u(M)=\oint_C \mu_1(p)\cdot G(M,P)\,ds(p)-\oint_C \mu_2(p)\cdot \partial_{n(p)}G(M,P)\,ds(p) \qquad (10)$$

ここに，G は未知のパラメータ λ をその中に含み，μ_1 と μ_2 が未知関数である。

式(10)を境界条件（式(3)～式(6)のうち適当な2つ）に代入したものを $l_k u=0$ $(k=1,2)$ で表わす。 この2つの式を満足し，かつ恒等的に零以外の解 μ_1 と μ_2 が存在すれば，そのときの λ の値が固有値である。 これを解析的に解くのは困難であるので，境界 C を N 個の線要素 Γ_i に分割し，この Γ_i について荷重密度 μ_1 と μ_2 をそれぞれ定数 μ_{1i} と μ_{2i} によって近似し得ると仮定し，Γ_i の中点 P_i $(i=1,2,\cdots,N)$ において境界条件を問題にすれば，境界条件 $l_k=0$ $(k=1,2)$ は次式に示される 2N 元線形同次連立方程式となる。

$$[A(\lambda)]\{\mu\}\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{ij}^{(1)} & \alpha_{ij}^{(2)}\\ \beta_{ij}^{(1)} & \beta_{ij}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mu_{1j}\\ \mu_{2j}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\end{Bmatrix} \qquad (11)$$

ここに，$i,j=1,2,\cdots,N$ である。 式(11)に零ベクトル以外の解が存在するための必要十分条件は式(12)あるいは式(13)である。

$$D(\lambda)\equiv \det[A(\lambda)]=0 \qquad (12)$$

$$D'(\lambda)\equiv \det\begin{bmatrix} re A(\lambda) & -im A(\lambda)\\ im A(\lambda) & re A(\lambda)\end{bmatrix}=0 \qquad (13)$$

従って，固有値は式(12)あるいは式(13)の根として定まる。 また，式(11)の解が実数の範囲で存在する場合には，次の式(14)が固有値に対する必要条件となる。

$$\left.\begin{aligned} D_1(\lambda)\equiv \det[re A(\lambda)]=0\\ D_2(\lambda)\equiv \det[im A(\lambda)]=0\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

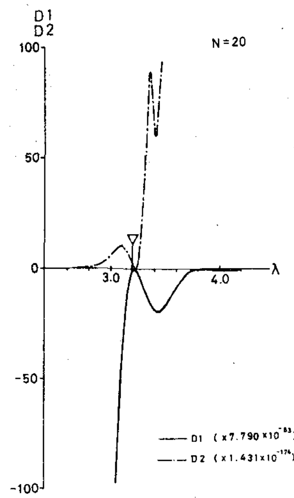

Fig. 2

3，解析結果について

半径が単位長さの円形板で，境界が固定支持された場合について D1 と D2 および D′ を計算した結果のうちで第1次固有値付近について Fig. 2 と Fig. 3 に示した。（図中の三角形が厳密解を示している。）式(13)の共通根が厳密解の近くに存在していることがわかる。

従って，式(14)の共通根を求め，この共通根の近くで式(13)の根，すなわち固有値を求めるという方法によって計算時間の短縮を計ることができると考えられる。

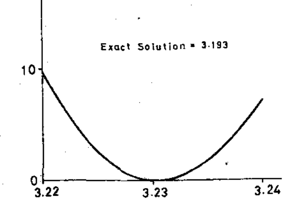

Fig. 3