I－2

数値ラプラス変換を用いた過渡応答の解析

京都大学工学部　正員　丹羽義次　　同　　正員　小林昭一
同　　正員　福井卓雄　同大学院　学生員○中島　信

1. はじめに

過渡現象を含む一般的物理現象の解析に対するラプラス変換の応用は，その有用性が高く，広く行なわれているが，原空間での解を得るための逆変換の過程は，繁雑さを伴ない，困難であることが多い。特に，その変換形が変換パラメータの関数型としてではなく，単に数値的にのみしか与えられないような場合には，逆変換表等の利用はできず，いわゆる数値ラプラス逆変換を行なう必要がある。この手法には，ルジャンドル多項式，ラゲール多項式等を用いて近似するものや，sineの級数展開を利用したものや，あらかじめ関数型をある程度予測し，変換形からその未定係数を決定しようとするもの等，各種考案されている。ここでは特に，具体的な一例として，積分方程式法による熱伝導問題の解析に対して数値ラプラス逆変換を適用し，その精度，問題点等について若干の考察を試みた。

2. 熱伝導問題の積分方程式への定式化

二次元空間内の等方均質な物質の領域D内で，放射発熱等のない場合における熱伝導の基礎方程式，　$k\nabla^2 T(P,t) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}(P,t)$　$;P\in D$　ただし，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$　(1)　を，時間tについてラプラス変換すれば，　$\kappa\nabla^2 T^*(P,S) - S T^*(P,S) + T(P,0) = 0$　$(\kappa = k/\rho c)$　(2)
となる。ここに，ρ, C, kはそれぞれ密度，比熱，熱伝導係数であり，Sはラプラス変換のパラメータで，時刻tにおけるD上の任意点Pの温度$T(P,t)$のラプラス変換を$T^*(P,S)$とする。以下においては特に，初期条件$T(P,0)=0$なる場合を考えることとする。偏微分作用素$\mathbb{L}$，　$\mathbb{L}[T^*] = \nabla^2 T^* - \frac{S}{\kappa}T^*$　を用いれば，(2)の基本特異解とはD上の2点x, yについて，　$\mathbb{L}[G(x;y)] = -\delta(x-y)$　δ；ディラックのデルタ関数　を満足するものであり，本問題では次のような形をとる。　$U^*(P,P',S) = \frac{1}{2\pi\kappa} K_0[(S/\kappa)^{\frac{1}{2}} r]$　(3)
ここに，K_0は0次の第2種変形ベッセル関数であり，rはD上の2点P，P′間の距離を示す。このU^*と(2)を満足する任意の解T^*を，次の相反定理より導いたいわゆるBettiの公式，

$$\int_D (u\mathbb{L}[v] - v\mathbb{L}[u])\,dV = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS \quad ; \frac{\partial}{\partial n}\text{は法線方向微分} \qquad (4)$$

に代入すれば結果は次のようになる。

$$F(P)\,T^*(P,S) = \kappa \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial T^*}{\partial n}(Q,S)\cdot U^*(P,Q,S) - T^*(Q,S)\cdot\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q,S) \right\} dS \qquad (5)$$

ただし，　$F(P) = 1$ (if $P\in D$)，$\frac{1}{2}$ (if $P\in\partial D$)，0 (if $P\notin(D+\partial D)$)

(5)においてPを∂D上にとれば，これは境界上の$T^*(Q,S)$と$\frac{\partial T^*}{\partial n}(Q,S)$に関する式となり，境界上でどちらかの関数が与えられているとき，他方に関する積分方程式を構成する。さらに，一度境界上で$T^*(Q,S)$，$\frac{\partial T^*}{\partial n}(Q,S)$が与えられれば，内部の$T^*(P,S)$の値は(5)より容易に求めることができる。(5)を数値計算する過程において，U^*，$\frac{\partial U^*}{\partial n}$の分割区間上での線積分は，P，P′が一致しない場合にはsimpson公式を用いるが，一致する場合は，(3)よりもわかるように変形ベッセル関数K_0の値が無限大となる特異積分となるため，この場合には，次に挙げる式によって積分の精度向上をはかった。

$$\int_0^x K_0(t)\,dt = -\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)^2} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) \tag{6}$$

γ: Euler's constant

3. ラプラス逆変換の方法

以上の過程を，各種の変換パラメータSについて数値計算し，それぞれに対応する変換域における温度$T^*(P,S)$を求めることによって，数値ラプラス逆変換の材料がそろうわけであるが，ここで採用した逆変換の手法は，原空間での関数型T(t)が，例えば，

$$T(t) = A + Bt + \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha e^{-b_\alpha t} \tag{7}$$

の形で表現できるものと仮定し，そのラプラス変換が，

$$S \cdot T^*(S) = A + \frac{B}{S} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{a_\alpha}{1 + b_\alpha/S} \tag{8}$$

となることから，(m+2)種類の変換パラメータをとった場合に，(8)を連立方程式的に解き，未定係数A, B, a_α ($\alpha=1,2,\cdots,m$) を求め，T(t)を決定する方法である。ただし，(m+2)元の連立一次方程式に簡単化するために，ここではb_αには適当な値を与える。

4. 解析結果および考察

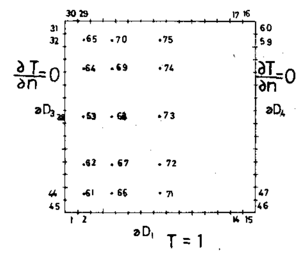

図1

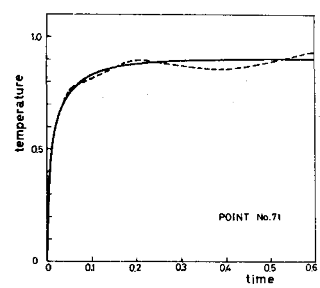

図2

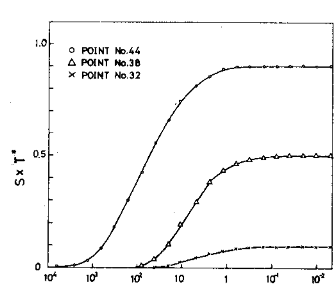

図3

例えば，図1に示すような領域，境界条件をもつ問題を，変換パラメータSに，0.01からはじめて順次前の2倍ずつに増加させて5242.88まで合計20種類とった場合の計算結果を，Error functionを用いて計算した理論解と比較した一例が図2であり，その誤差は領域内各点で最大2~3%であった。変換パラメータSの値の選び方は，逆変換の精度と大いに関係があるが，図1の問題について，各種のSの値に対応するT^*の値を計算し，図3に示すようにS−(S×T^*)のグラフを描き，曲線が両端共に収束するような最大,最小値の幅が一応のめやすとなるようである。図からもわかるように，必要な値の幅はかなり大きく,数少ないSの個数でカバーするには2倍ずつ,5倍ずつというようにとるのが合理的であろう。また，Sの個数は，その回数だけ積分方程式を解くことになることから，精度と経済性の上から考えて，せいぜい10数個でよいのではないかと考えられる。なお，ちなみにFACOM 230-75によるCpu-Timeは約100secであった。

5. あとがき

熱伝導問題のように，その過渡的変化状態が比較的単純なものは，逆変換も簡単であるが，振動のような現象では，大局的，極所的傾向をともに精度よく表現することはかなり困難である。もう少し複雑な境界条件をもつ熱伝導問題，および，他の手法を使った振動問題の逆変換等については，現在検討中であり，結果は当日とりまとめて発表する予定である。