積分方程式による固有値問題の解析

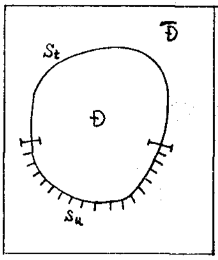
京都大学工学部　正員　丹羽義次　同　正員　小林昭一
同　正員　福井卓雄　同　学生員○北原道弘

Helmholtz型基礎方程式が変数分離不可能な任意形状を有する弾性面内自由振動問題において、より正確に、より短時間で固有値を求める一般的手法の確立は急務であると思われる。一つの応用面であるダム、トンネルなどの地震応答解析の方面では、有限要素法により一般固有値問題として取り扱われているようであるが、ここでは線形弾性問題の基礎方程式を積分方程式に変換し境界上での離散化により線形連立方程式に導き、固有値問題を定式化する。これは積分核にパラメータを含む複素超越方程式の零点を求める問題に帰着する。積分方程式法の最も大きな特徴は、境界上でのみ積分を行なうことにより、解くべき離散化された方程式の次元が著しく低下できることである。

線形　等方　均質　弾性体　を対象とし　上記過程と数値計算法を略述する。

記号の定義　便宜上テンソル表示を用いることとし　次の約束をする。

$\mathbb{L}$ $\mathbb{T}^{(n)}$：微分作用素　∇：グラディエント　Δ：ラプラシアン　$\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{t}^{(n)}, \underset{\sim}{n}, \underset{\sim}{f}$：変位，応力，単位法線，単位体積当りの物体力ベクトル　$\mathbf{U}\ \mathbf{T}$：テンソル　$\mathbf{1}$：単位テンソル　C_L, C_T：縦波，横波の波速



基礎方程式　（定常応答に対する Navier Cauchy の式）

$$\mathbb{L}\underset{\sim}{u}(x) \equiv \mathbb{L}^{*}\underset{\sim}{u}(x) + \omega^2\underset{\sim}{u}(x) = [C_T^2\Delta\mathbf{1}. + (C_L^2 - C_T^2)\nabla\nabla. + \omega^2\mathbf{1}]\,\underset{\sim}{u}(x) = -\underset{\sim}{f}(x) \qquad x \in D \tag{1}$$

境界条件

$$\underset{\sim}{u}(x) = \underset{\sim}{g}_u(x)$$

$$\underset{\sim}{t}^{(n)}(x) = \mathbb{T}^{(n)}\underset{\sim}{u}(x) = [\lambda\underset{\sim}{n}\nabla. + 2\mu\underset{\sim}{n}.\nabla + \mu\underset{\sim}{n}_\wedge\nabla_\wedge]\,\underset{\sim}{u}(x) = \underset{\sim}{g}_t(x) \tag{2}$$

基本特異解の構成

微分作用素$\mathbb{L}$に対する基本特異解$\mathbf{U}$は次の方程式を満足する。

$$\mathbb{L}^{x}\mathbf{U}(x;y) = -\mathbf{1}\delta_x(y)/\rho \qquad \delta:\ \text{Dirac measure} \tag{3}$$

Hörmander 理論より　$\mathbf{U}$を求めることは　$\det\mathbb{L}$なるスカラーオペレーターの解を求めることに帰着し　二次元　平面ひずみ問題に対しては次のようになる。

$$U_{ij}(x;y) = \frac{i}{4\mu}\left[H_0^{(1)}(\xi_2 r)\delta_{ij} + \frac{1}{\xi_2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\{H_0^{(1)}(\xi_2 r) - H_0^{(1)}(\xi_1 r)\}\right] \tag{4}$$

$H_0^{(1)}(z)$：第一種0次 Hankel 関数　　$\xi_1 = \frac{\omega}{C_L}$　$\xi_2 = \frac{\omega}{C_T}$　$r = |x - y|$　$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Green 第二，第三公式の構成

$\underset{\sim}{v}.\rho\mathbb{L}\underset{\sim}{u}$　の内部領域Dでの積分を考えることにより次の相反定理を得る。

$$\int_D[\underset{\sim}{v}.\rho\mathbb{L}\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}.\rho\mathbb{L}\underset{\sim}{v}]\,dV = \int_S[\underset{\sim}{v}.\mathbb{T}^{(n)}\underset{\sim}{u} - \mathbb{T}^{(n)}\underset{\sim}{v}.\underset{\sim}{u}]\,dS \tag{5}$$

$\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$として　それぞれ　(1),(3)を満足する関数を選ぶと　Somigliana の恒等式として知られる次式を得る。

$$H(x)\underset{\sim}{u}(x) = \int_D \mathbf{U}(x;y).\rho\underset{\sim}{f}(y)\,dV_y + \int_S \mathbf{U}(x;y).\underset{\sim}{t}^{(n)}(y)\,dS_y - \int_S \mathbf{T}(x;y).\underset{\sim}{u}(y)\,dS_y \tag{6}$$

$H(x) = 1 \quad x \in D$　,　$H(x) = 1/2 \quad x \in S$　,　$H(x) = 0 \quad x \in \overline{D}$

$$T_{ij}(x:y)=\frac{i}{4\mu}\Big[(\lambda n_{yj}\partial_{yi}+\mu n_{yi}\partial_{yj}+\mu n_{yk}\partial_{yk}\delta_{ij})H_0^{(1)}(\xi_2 r)$$
$$+\frac{1}{\xi_2^2}(\lambda n_{yj}\partial_{yi}\partial_{yk}\partial_{yk}+2\mu n_{yk}\partial_{yk}\partial_{yi}\partial_{yj})\{H_0^{(1)}(\xi_2 r)-H_0^{(1)}(\xi_1 r)\}\Big] \tag{7}$$

上式は才2基本特異解と呼ばれ　n_{yi} は y 点での i 方向微分を示す。

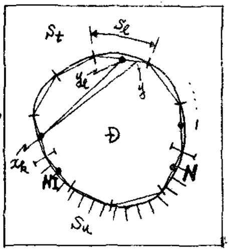
弾性問題の偏微分方程式(1)は積分方程式(6)に変換されたわけであるが　物体力を考えない場合　この式は境界上の未知量 $t^{(n)}$, u のみにより任意点 x での変位が決まることを示しており　本解析における固有値問題では次のような境界条件を設定する。

<u>混合境界値問題</u>

$$\frac{1}{2}u(x) = -\int_{S_t}\mathbf{T}(x:y).u(y)dS_y + \int_{S_u}\mathbf{U}(x:y).t^{(n)}(y)dS_y \qquad x\in S_t$$
$$0 = \int_{S_u}\mathbf{T}(x:y).u(y)dS_y + \int_{S_u}\mathbf{U}(x:y).t^{(n)}(y)dS_y \qquad x\in S_u \tag{8}$$

両式は才1, 才2 の基本特異解にパラメータ ω を含む（即ち Hankel関数の引数とその係数）積分方程式となり　ω のある値に対してのみ零でない解　u, $t^{(n)}$ が存在する。この時の ω の値が　方程式(1)の固有値となる。

<u>境界分割　と　数値計算法</u>



(8)式の積分を評価するため境界を N 個に分割し次の仮定を設ける。

(i) 分割要素は直線で近似

(ii) 未知関数（密度） u_i, $t_i^{(n)}$　と $r_{,yi}$ $\frac{\partial r}{\partial n_y}$ は分割要素 S_e を通じ一定と仮定し　その中心 y_e での値で評価する。

定義
- x_k：積分の間　固定された才 k 番目直線要素の中心（field point）
- y_e：積分の間　変化する（source point y）才 e 番目直線要素の中心

この仮定のもとでは　才1，才2 基本特異解の S_e 区間積分の値は　幾何学的境界条件と場の点 x_k を与えると定数として決定されることになり　S_e 区間から x_k 点への影響係数と考えられ　その積分の値を次のように記することにする。

$$\overline{U}_{ij}(x_k:y_e) = \int_{S_e}U_{ij}(x_k:y)dS_y$$
$$\overline{T}_{ij}(x_k:y_e) = -\int_{S_e}T_{ij}(x_k:y)dS_y \qquad \overline{T}'_{ij}(x_k:y_e) = -\int_{S_e}T_{ij}(x_k:y)dS_y-\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{ke}$$

この規約のもとに(8)式は次のように書ける

$$\sum_{e=1}^{N1}\overline{T}'_{ij}(x_k:y_e)u_j(y_e) + \sum_{e=N1+1}^{N}\overline{U}_{ij}(x_k:y_e)t_j^{(n)}(y_e) = 0 \qquad x\in S_t \quad (k=1,2\cdots N1)$$
$$\sum_{e=1}^{N1}\overline{T}_{ij}(x_k:y_e)u_j(y_e) + \sum_{e=N1+1}^{N}\overline{U}_{ij}(x_k:y_e)t_j^{(n)}(y_e) = 0 \qquad x\in S_u \quad (k=N1+1\cdots N) \tag{9}$$

一般的にマトリックス表示すると

$$[A_{ij}(x_k:y_e)][\varphi_j(y_e)] = 0$$

かくして各要素 A_{ij} にパラメータ ω を含む 2N 次元複素連立方程式に帰着されたわけであるが　恒等的に零でない解 $[\varphi_j]$ が存在するための必要十分条件

$\det|A_{ij}| = 0$　　　　より固有値 ω が求められる。

解くべき方程式が低次元化できるとはいえ　特異積分の評価　複素行列式の根の評価なる　2つの問題が残っている。現在　数値計算を実行中であるが　この点について　当日とりまとめて結果と供に報告する。