Ⅳ－22

カットによる最大ODフロー問題への１つのアプローチ

大阪市立大学工学部　正員　西村　昂

1．まえがき

ネットワーク上における最大OD－フロー問題に対してカットを利用した解法として、これまでにカット法と名づけている一つの方法を提案している。しかしカット法ではぼう大な量のカットを発生させなければならないので実用的には大きな問題をもっているといえる。そのために比較的簡単に計算ができる実用的解法として簡便カット法ともいえる方法を考えてみた。以下に例題をあげてカット法と比較して説明する。

2．カット法

ネットワーク$G(N, A)$が与えられ、各部分の容量Cが与えられている。この上を流れるフロー$F\{f_{ij}\}$は(1)式のマトリックスで表わされるODパターンを持っているとする。

$$P = \{p_{ij}\}, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \qquad (1)$$

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sum_i \sum_j f_{ij}} = \frac{f_{ij}}{T} = 一定 \qquad (2)$$

したがってOD表はPにスカラーTをかけたもので表わされる。この時、各部分のフローが容量を越えないTの最大値を求めるのが、問題といえる。

いまネットワークに任意のカットセット$K_k(N_1, N_2)$を考える。これによって、図１のようにネットワークがN_1とN_2の２つの部分に分けられると考える。カットセットの容量を$C_k(N_1, N_2)$で表わし、カットセットを構成するアーク容量の和で表わす。簡単化のために、ここではノードの容量は考慮に入れないでおく。カット$K_k(N_1, N_2)$を横断するフローはN_1に含まれるゾーンに起点をもち、N_2に含まれるゾーンに終点をもつフローの和であるから、これを$F_k(N_1, N_2)$とすると、

$$F_k(N_1, N_2) = \sum_{i\in N_1} \sum_{j\in N_2} p_{ij} \qquad (3)$$

このカットにおいて通り得る最大フローは

$$T_k = \frac{C_k(N_1, N_2)}{F_k(N_1, N_2)} \qquad (4)$$

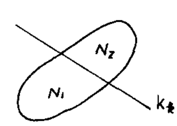

図１　ネットワークのカット

で表わされる。すなわち、ODパターンPにT_kをかけて得られるOD交通量を越えるフローは流せない。この計算をすべてのカットセット集合Kについて行なうと、すべてのカットにおいて(4)式により最大フローが計算される。しかし、ネットワーク全体として受け入れられる最大フローは、これらの中の最小のものであり、これをTとすると、

$$T = \min_{k\in K} \{T_k\} \qquad K = すべてのカット集合 \qquad (5)$$

であるから、PにスカラーTをかけて得られるOD交通量（T・P）を越えるフローは流し得ない。以上のような解法をカット法と呼ぶ。

3．簡便カット法

この方法はカットの数を最小限に限定して最大フロー問題を考察しようとする試みの1つで近似計算法といえる。このアルゴリズムの概略は次のようである。

<u>ステップ1</u>（カット体系の指定）ネットワークをカットにより2分し2つの分割ネットワークをつくる。それらをさらに次位のカットにより2分する手続きを繰り返して各ノードがばらばらに分離されるようなカット体系を指定する。下位のカットはその容量を超えるフローが直接の上位カットを迂回すれば不足容量を補なえるような位置にとる。

<u>ステップ2</u>（カット容量ツリーの作成）指定されたカットの容量（フローの上限値）Tを(4)式により求める。このTが実行可能であるためには、各分割ネットワーク部分の容量がT以上であればよい。あるいはさらに下位でTより小さい容量の部分があってもその直接上位カットへの迂回で補えればTに影響を与えないこととなる。この状況をみるために、指定カット体系に従ってカット容量をツリー状に表示する。これをカット容量ツリーと呼ぶことにする。n個のノードよりなるネットワークはn-1個のカットで全ノードが分離されるからn-1個の点よりなるカット容量ツリーを形成する。

<u>ステップ3</u>（最大フローの計算）カット容量ツリーからネットワーク全体として受け入れられるフローの上限値を求める。最高位のTに対して下位がすべてTより大であればTが最大フローとなる。もし下位にTより小さい部分があるとその直接の上位カットへ迂回させて上・下位のカットが同じ容量を持つようにフロー上限値を修正する。すなわち図2でカット K_{i+1} のフロー T_{i+1} がその直接の上位カット K_i のフロー T_i より小さい時、K_{i+1} を通るフローは K_i へ迂回すれば T_i と T_{i+1} の間の大きさの新しいフロー $T_i' = T_{i+1}'$ を求めることができる。Fは(3)式による。

$$T_i' = T_{i+1}' = (F_i \cdot T_i + F_{i+1} \cdot T_{i+1}) / (F_i + F_{i+1}) \qquad (6)$$

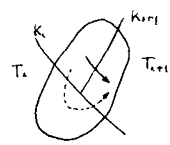

図2

このような操作をくり返して最高位のTが最小値となるようにツリーを修正する。この修正されたツリーにおける最高位のTが求める最大フローとなる。

具体的な計算方法は2種類考えられる。その1つ①は下位のカットでの計算時に上位のフローに相当する容量を先取りして残余容量で内部の横断フローに対する上限値を求める方法で、もう1つ②は指定カットの片側を1つの代表ノードにおきかえた縮小ネットワークによる方法で上位フローと内部フローを同時に取り扱う方法といえる。後者の方法では最大フローはカット容量ツリー上の最小値で与えられ、上記ステップ3の修正は不要となる。

4．計算例

図3のネットワークと指定カット1~3と図4のODパターン対して計算すると次のようなカット容量ツリーが得られる。各カットでは両方向で計算できるが図では小さい方のみを示した。②法より最大フローは10、

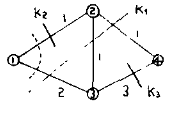

図3

	1	2	3	4
1	*	01	01	01
2	0.1	*	01	0
3	0.1	0	*	0.1
4	01	0	02	*

図4

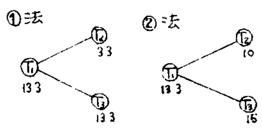

図5　カット容量ツリー

また①を修正するとK₁よりλ単位をK₂の迂回用にまわすと、λ=1の時 $T_1' = T_2' = 10$ となる。またカット法によると点線のカットが最小で同じく10となっている。