アーランサービスサイクルキューモデルの解析に関する一考察

京都大学工学部　正員　吉川和広
京都大学工学部　○正員　山本幸司

1. はじめに　従来サイクルキューモデルの数値解法としては，①サービスが完全に過去に関係のないランダムな状態で行なわれると考えることができ，輻輳の程度の上限を評価することになること，②状態記述が比較的簡単であり数値解析も容易となること，などの理由により指数サービスを仮定した研究が多かった。しかし実際現象においてはサービス時間は指数分布よりもむしろアーラン分布に従うものがほとんどである。そこで筆者らは図－１に示す２段サイクルキューをアーランサービスサイクルキューと考え，連立一次方程式系として定式化するとともにスィープアウト法による解析を試みた。すなわち指数サービスサイクルキューでは $P(n_1,n_2|t)$ によって生起状態が記述できるのに対し，アーランサービスサイクルキューの場合には，

$$P(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_{k_1}^1;a_1^2,a_2^2,\cdots,a_{k_2}^2,n_1,n_2|t)$$

という複雑な形を必要とした。ここに，

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{k_1}a_j^1=\begin{cases}S_1 & (n_1\geqq S_1)\\ n_1 & (n_1<S_1)\end{cases},\quad \sum_{j=1}^{k_2}a_j^2=\begin{cases}S_2 & (n_2\geqq S_2)\\ n_2 & (n_2<S_2)\end{cases}\\ \displaystyle P(n_1,n_2|t)=\sum_{\{a_j^1,a_j^2\}}P(a_1^1,\cdots,a_{k_1}^1,a_1^2,\cdots,a_{k_2}^2,n_1,n_2|t)\\ \displaystyle\sum_{n_1=0}^{N}P(n_1,n_2|t)=1\quad,\quad n_1+n_2=N\end{array}\right\}\qquad(1)$$

である。このため指数サービスの場合は状態確率変数の数がN+1個であるのに対し，アーランサービスの場合には，

$$M=\sum_{x=0}^{N}{}_{x+k_1-1}C_x\times{}_{N-x+k_2-1}C_{N-x}\qquad(2)$$

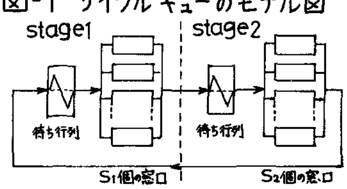
となり，k_1,k_2,S_1,S_2 の各値が大きくなるにつれMの値は指数的に増大してしまう。このように状態確率変数が多くなれば連立一次方程式の係数行列もキングサイズとなるため，大型電子計算機を利用するにしてもスィープアウト法を大きなモデルに適用することが困難になる。そこで本研究はアーランサービスサイクルキューの係数行列が，「対角要素がNON ZEROで，非対称かつ非常に疎であるが帯行列の性質を持たないキングサイズの行列」という性質を持つことに注目し，係数行列がこのような性質を持つ連立一次方程式の解法として有効なCG法の適用を考えていくことにした。

2 モデルの解法　アーランサービスサイクルキューモデルの状態方程式は，定常状態を考えれば次のような連立一次方程式系として表わすことができる。

$$\left.\begin{array}{l}A\mathbb{x}=\mathbb{b}\\ \text{ここに}\quad A=\underbrace{\begin{pmatrix}\boxed{\text{対角要素が NON ZERO な疎行列}}\\ 1,1,\cdots\cdots,1\end{pmatrix}}_{M}\Big\}M-1\\ \mathbb{x}=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_M)^T\\ \mathbb{b}=(0,0,\cdots\cdots,1)^T\end{array}\right\}\qquad(3)$$

いまこの連立一次方程式を次のように変形すれば，$f(\mathbb{x})$ を最小とする $\mathbb{x}$ を求める極値問題に帰着できる。

図-1 サイクルキューのモデル図



本研究で用いた記号

S_i；第iステージの窓口数　　k_i、第iステージのアーランサービスの位相

a_j^i；第iステージのS_i個の窓口のうち仮想窓口jでサービス中の客数

n_i；任意の時刻tにおいて第iステージにいる客数

N；システム全体にいる客数

A；各状態確率変数を未知数とする状態方程式の係数行列の任意の1行を単位ベクトルで置きかえた行列

M；状態確率変数の数，また行列Aのランク数

H_i；第iステージでサービス中の土運船の平均隻数

Lq_i；第iステージでの土運船の平均待ち行列長

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad , \mathbf{r} ; \text{残差ベクトル} \\ f(\mathbf{x}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{M} r_i^2 \end{array}\right\} \quad (4)$$

ここで $f(\mathbf{x})$ は常に非負であり，$\mathbf{r} = \mathbf{0}$ すなわち正解が得られたときには $f(\mathbf{x}) = 0$ が成立する。CG法は本来このような極値問題の解法の1つであり，変数 $\mathbf{x}$ を1つずつ動かさずに $f(\mathbf{x})$ の最急勾配方向をたどり，特に最急勾配方向から前回修正した方向の成分を除いたものを修正方向にとりながら解を改善していく方法である．いま第 k ステップめの近似解 $\mathbf{x}_k$ が求められると，第 $k+1$ ステップめの近似解は次式によって求めることができる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (5)$$

ここに，$\mathbf{p}_k$ は前回修正した方向の成分を除いた最急勾配方向であり，α_k は $\mathbf{p}_k$ 方向に修正すべき大きさを示す．

3. モデルの適用事例

CG法によるアーランサービスサイクルキューモデルの解析が実際の待ち現象の解析法として有効かどうか，すなわち同一現象を指数サービスサイクルキューモデルとして解析した結果と比較して十分に意義があるかを検討するため，次のようなしゅんせつ工事へ適用することにした。

土運船隻数 $N=4$，しゅんせつ船隻数 $S_1=1$ 押船隻数 $S_2=3$，しゅんせつ船サービス時間 平均 $1/\mu_1=51.7$ 分，相 $k_1=11$，押船サービス時間 平均 $1/\mu_2=228.0$，相 $k_2=110$．

表-2 各CASEの計算結果

	$M/1+M/3$	$E_2/1+E_3/3$	$E_2/1+E_4/3$	$E_2/1+E_5/3$	$E_3/1+E_3/3$	$E_3/1+E_4/3$	$E_5/1+E_5/3$	$E_5/1+E_{10}/3$
P(0,4)	0.417	0.388	0.386	0.385	0.381	0.379	0.371	0.368
P(1,3)	0.283	0.370	0.376	0.380	0.392	0.399	0.427	0.440
P(2,2)	0.193	0.188	0.188	0.188	0.185	0.184	0.177	0.173
P(3,1)	0.087	0.050	0.046	0.044	0.039	0.036	0.025	0.019
P(4,0)	0.020	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000
Lq_1	0.427	0.302	0.292	0.286	0.272	0.261	0.228	0.212
Lq_2	0.417	0.388	0.386	0.385	0.381	0.379	0.371	0.368
H_1	0.583	0.612	0.614	0.615	0.619	0.621	0.629	0.632
H_2	2.572	2.698	2.708	2.714	2.728	2.739	2.772	2.778

しかしこれらの値によって定式化しようとすれば，状態確率変数の数Mが式(2)より2,117,061個となるため，ここでは表-1に示す8つのcaseについて計算した。計算結果の一部を示したのが表-2，図-2である。これより以下のことがいえる．

① 各値とも指数サービス($k_1=k_2=1$)とアーランサービスとの差は明確に出ている。

② H_1 および H_2 は k_1，k_2 の値が大きくなるにつれて増加していくが，Lq_1，Lq_2 は逆に減少し，各値とも k_1 が一定の場合には k_2 が大きくなってもほとんどある値に収束する．

4. おわりに

3.の結果より，アーランサービスサイクルキューとしての解析が有効であると考えられ，また位相が大きくなっても H_i や Lq_i はある値に収束することが予想された。今後はさらに位相が大きい場合，あるいは一定サービスの場合についても考えていく必要がある。

表-1 各CASEの状態確率変数M

$k_1 \backslash k_2$	1	3	4	5	10
1	<u>5</u>	30	55	91	506
2	9	<u>50</u>	<u>90</u>	<u>147</u>	792
3	13	<u>70</u>	<u>125</u>	203	1078
5	21	110	195	<u>315</u>	<u>1650</u>

注 下線は事例に用いたcaseを示す

図-2 位相k_1,k_2と評価値との関係