ライフ・サイクルを考慮した住宅選択モデル

京都大学工学部　正会員　　藤田昌久
京都大学工学部　正会員　　柏谷増男
京都大学大学院　学生員　○塚本直幸

1. はじめに

本研究は、長期的な見通しを持った住宅消費者がどのような行動をするのか、すなわち所得制約に従いながら、所得の上昇、住宅の老朽化という二つの要因によって、消費者はある期間すべてを通じての効用を最大にするために、いつ、どのような住宅に移動するかを、単純化されたモデルを用いて分析しようとするものである。

2 モデルの定式化

以下、モデルの定式化のための仮定と、記号の説明について述べる。

①各時刻tにおける消費者の単位時間あたりの効用は住宅サービス量$z(t)$および一般財の消費量$x(t)$によって決まるものとし、これを$u[x(t), z(t)]$と表わす。

②各時刻tにおける所得は$\bar{y}e^{\rho t}$と表わせるものとする。ただし$\bar{y}$は所得の初期値である。

③同一の住宅から得られる住宅サービス量は初期値$\bar{z}$から老朽化率δで指数的に減少するものとし、これを$\bar{z}e^{-\delta t}$と表わす。

④住宅サービスの減少に伴なって、単位サービスあたりの価格も低下し、それは$\bar{p}e^{-\delta t}$で表わされるものとする。

⑤時刻τに移動することに伴なう不効用$C(\tau)$は$Ce^{-\alpha\tau}$と表わされるものとする。

⑥消費者はある期間$[0, T]$の間に、時間的なウェイト関数$e^{-\lambda t}$をも考慮して、その所得制約に従いながら、全期間を通じての効用を最大にするために、多くとも1回だけ住宅を移動するものとする。

以上の仮定にもとづいてモデルの定式化を行なう。ただし以下において添字1は移動前の住宅に関する定数、添字2は移動後のそれを示すものとする。

まず所得制約は次式のようになる。

$$\bar{y}e^{\rho t} = \begin{cases} x(t) + \bar{p}_1 e^{-\delta_1 t}\bar{z}_1 & (0 \le t < \tau) \\ x(t) + \bar{p}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}\bar{z}_2 & (\tau \le t \le T) \end{cases} \quad (1)$$

単位時間あたりの効用は、仮定①②③および(1)式より次のように表わされる。

$$u(t) = \begin{cases} u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_1 e^{-\delta_1 t}\bar{z}_1,\ \bar{z}_1 e^{-\delta_1 t}] & (0 \le t < \tau) \\ u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}\bar{z}_2,\ \bar{z}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}] & (\tau \le t \le T) \end{cases} \quad (2)$$

このことより、もし時刻τ $(0 \le \tau \le T)$に移動するとすれば、その時の期間$[0, T]$にわたる全効用は、移動に伴なう不効用をも考慮して次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\tau, \bar{z}_2) = & \int_0^{\tau} u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_1 e^{-\delta_1 t}\bar{z}_1,\ \bar{z}_1 e^{-\delta_1 t}]e^{-\lambda t}dt \\ & + \int_{\tau}^{T} u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}\bar{z}_2,\ \bar{z}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}]e^{-\lambda t}dt \\ & - C(\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

すなわち問題は(3)式を最大にするように、最適な移動時刻τを決定し、同時に最適な住宅サービス量$\bar{z}_2$を持つ新しい住宅のタイプを選ぶことである。ただし、

$$C(\tau) = \begin{cases} Ce^{-\alpha\tau} & (0 \le \tau < T) \\ 0 & (\tau = T) \end{cases} \quad (4)$$

である。

3 $\bar{z}_2$が与えられている場合

まず移動すべき新しい住宅のサービス量の初期値$\bar{z}_2$が与えられている時、$[0, T]$の間に移動の起る条件および最適な移動時刻はいつかということについて考えてみる。

いまV_1で移動しない場合の全効用、$V_2(\tau)$で時刻τに移動した時の全効用を表わすものと

すれば、期間 $[0, T]$ に移動が生ずるためには $V_2(\tau) > V_1$ となるような τ $(0 \leq \tau < T)$ の存在することが必要十分条件である。V_1, $V_2(\tau)$ は次式のように表わされる。

$$V_1 = \int_0^T u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_1 e^{-\gamma_1 t}\bar{g}_1,\ \bar{g}_1 e^{-\delta_1 t}]e^{-\lambda t}dt \tag{5}$$

$$V_2(\tau) = \int_0^\tau u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_1 e^{-\gamma_1 t}\bar{g}_1,\ \bar{g}_1 e^{-\delta_1 t}]e^{-\lambda t}dt + \int_\tau^T u[\bar{y}e^{\rho t} - \bar{p}_2 e^{-\gamma_2 (t-\tau)}\bar{g}_2,\ \bar{g}_2 e^{-\delta_2 (t-\tau)}]e^{-\lambda t}dt - Ce^{-\alpha t} \tag{6}$$

ここで効用関数として対数線形

$$u(x, g) = (1-\beta)\log x + \beta \log g \tag{7}$$

を用い、簡単のために住宅の老朽化率、住宅サービス価格の低下率は住宅サービスの初期値 $\bar{g}$ より独立であるとしてみよう。つまり、

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \tag{8}$$

である。そうすれば、移動が生ずるための条件は、与えられたパラメーターの関係として次のように表わされる。

$$\beta(\log \bar{g}_2 - \log \bar{g}_1 e^{-\delta\tau}) > (\bar{p}_2\bar{g}_2 - \bar{p}_1\bar{g}_1 e^{-\gamma\tau})\frac{\lambda(1-\beta)e^{\gamma\tau}}{\theta\bar{y}}\frac{e^{-\theta\tau} - e^{-\theta T}}{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda T}} + \frac{\lambda}{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda T}}Ce^{-\alpha\tau} \tag{9}$$

ただし $\theta = \gamma + \rho + \lambda$

(9)式を解釈すれば、新しい住宅から得られる効用と今住んでいる住宅（ある程度の老朽化が進んでいる）との効用の差が、それぞれの住宅に支払う家賃の差額と移動に伴なう不効用とによって決まるある値を越えるような時刻 τ が $[0, T]$ の間に存在する時、消費者は住宅を移動する。

(9)式からわかることは、$\bar{g}_1 < \bar{g}_2$, $\bar{p}_1\bar{g}_1 < \bar{p}_2\bar{g}_2$ とすれば、消費者の得る効用のうち、住宅サービスから得られる効用の割合を示す β およびパラメーター $\bar{y}$, ρ, $\bar{p}_1$, α, δ が大きければ大きいほど、移動は起りやすくなり、逆にし、$\bar{p}_2$ が大きいほど移動は起りにくくなる。

次に移動するとすれば、いつが最適であるかについて考えてみる。

まず関数 $V(\tau)$ の形については次のどれかのパターンになることがわかっている。

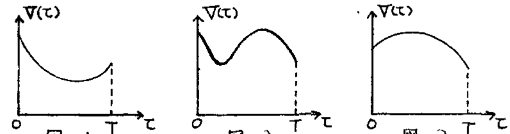

図-1　図-2　図-3

図1は住宅の老朽化率 δ_1, δ_2 が比較的小さい時、図2はその値が中くらいの時、図3は大きい時である。パラメーターが図1のような関係にある時、最適移動時刻は $\tau = 0$ であり、図3の場合は $dV(\tau)/d\tau = 0$ を満たす τ であり、図2の時はそのどちらかである。

4. $\bar{g}_2$ が変数となる場合

つぎに問題をより一般化して、最適な移動時刻 τ^* とともに、最適な住宅サービス量 $\bar{g}_2^*$ をも同時選択することを考える。

最初に、3で述べた結果を用いて τ^* を $\bar{g}_2$ の関数として求める。

$$\tau^* = \tau(\bar{g}_2) \tag{10}$$

続いて $\tau = \hat{\tau}$ と固定して、最適な $\bar{g}_2^*$ を $\hat{\tau}$ の関数として求める。

$$\bar{g}_2^* = \bar{g}_2(\hat{\tau}) \tag{11}$$

(10)と(11)を連立させて解けば、最適な τ^*, $\bar{g}_2^*$ を求めることができる。

たとえば効用関数に対数線形を用いれば

$$\partial^2 V/\partial \bar{g}_2^2 = -\beta(e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda T})/\lambda\bar{g}_2^2 < 0 \tag{12}$$

となるから $\partial V/\partial \bar{g}_2 = 0$ を解いて

$$\bar{g}_2^* = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\theta_2\bar{y}}{\lambda}\frac{e^{-\delta_2\hat{\tau}}}{\bar{p}_2}\frac{e^{-\lambda\hat{\tau}} - e^{-\lambda T}}{e^{-\theta_2\hat{\tau}} - e^{-\theta_2 T}} \tag{13}$$

として求まる。(13)式を(10)式に代入すれば最適な τ^* が得られ、よって最適な $\bar{g}_2^*$ も定まる。

5　おわりに

以上、ごく単純な場合について考察したが、今後は移動が2回以上行なわれる場合、移動コストが予算制約に入ってくる場合など、さらに一般化したモデルについても分析していく必要がある。