統計的決定理論の盛土設計への一適用法

京都大学工学部　正員　黒田　勝彦
日本国有鉄道　正員○西川　直輝

1　序　一般に構造物の設計には各種の不確実性が混入している。一方，設計とは「ある条件のもとでの意思決定のプロセス」と考えられる。このことは設計を「不確実性のもとでの決定問題」としてとらえることの合理性を示唆するものである。本研究はこの点に着目し，盛土構造物の設計に不可避的に混入する地盤強度に関する不確実性のもとでの最適のり勾配の選択問題を統計的決定理論によって定式化した。さらに地盤強度に関する分布形の差異を地盤の種類の相違とみなして，これの最適解におよぼす影響を考察した。

2　統計的決定理論による定式化　現行の設計では，地盤の状態を示す量θとしてサンプル平均$\bar{X}$を用いている。しかし最近の多くの研究により[1),2)]，θを確率変量として取り扱う妥当性が主張されている。本研究はこのような確率論的なアプローチを基礎として，調査設計の過程を統計的決定理論により定式化する。簡単のためθとして粘土地盤に関するC_uの母平均値を考える。C_uの母分散σ_c^2は既知とする。この場合，盛土の破壊確率P_fは破壊を示すパラメータZを用いて次式で与えられる。

$$P_f=(R^*\sigma_c\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{0}\exp[-\{Z-R^*L^*(\mu_c-S^*)\}^2/2R^{*2}\sigma_c^2]\,dZ \qquad \text{-----(1)}$$

上式においてR^*，L^*はすべり円弧の半径および円弧の長さである。S^*はR^*上の最大せん断応力である。一方，この盛土（天端高H_b，法勾配m_b）に関する損失関数Lは地盤の状態θと設計行動$a(x)$によって決り，次式で与えられる。

$$L\{\theta,a(x)\}=l_0(1-P_f)+l_1\cdot P_f \qquad \text{-----(2)}$$

l_0は初期建設費，l_1は補償費および再建費である。この場合，設計者はθに関する情報を得る手段として土質調査を実施 結果Xを得る。そしてこのXに基づいて行動$a(X)$を決定する。周知のように，この結果Xは平均値θのまわりに正規分布する確率変数であり，その密度関数は調査個数Nに対し，次式で与えられる。

$$f(X|\theta)=(\sqrt{2\pi}\sigma_c/\sqrt{N})^{-1}\exp[-(X-\theta)^2/2\sigma_c^2N] \qquad \text{-----(3)}$$

よって盛土建設に伴うリスクRは次式で与えられる。

$$R(\theta,a)=\int_{-\infty}^{\infty}L\{\theta,a(x)\}f(x|\theta)\,dX \qquad \text{-----(4)}$$

ところで地盤強度の母平均θは我々にとって未知であり，これをある確率$\tau(\theta)$に従う確率変数とみなすことにより，いわゆるベイズ（Bayes）リスクが計算される。即ち，

$$r(\tau,a)=\int_{\Theta}R(\theta,a)\tau(\theta)\,d\theta\ ,\qquad \tau(\theta)=1/(b_2-b_1)\quad b_2=3,\ b_1=1 \qquad \text{----(5)}$$

である。Θは確率変数θの定義域である。さて，最適な行動基準として期待値最小を是認すると$\min\{r(\tau,a)\}$を満すNが最適調査規模であり，最適な行動$a(X)$である。上の定式

化において，行動$a(X)$を盛土のすべり面上のS^*と解釈すれば，S^*とm_bは力学的に1:1の対応がつくので最適法勾配m_bを決定できる。図-1はH_b=5m，粘土層厚D=5mのときの$m_b \sim S^*$の関係である。

3 結果の考察

3-1 最適安全率 現行の設計では$S^*=a(X)$で設計した場合，安全率F_sはサンプル平均Xに対し次式で与えられている。

$$F_s = X/a(X) \qquad \text{---(6)}$$

このような安全率の決め方で設計する場合，たとえば調査個数N=2個のもとでは（盛土単位長に換算した個数）図-2に示すように安全率F_s=1.8程度が最適な行動といえる。これは盛土周辺の環境条件に左右される。

3-2 最適試験個数 (6)式のような形で与えられる設計行動$a(X)$をとる場合，最適なNは図-3に示すように$r(\tau,a)$を最小にするNとして求められる。この計算例の場合ではN=2が最適である。

3-3 最適設計行動 (5)式において，$a(X)$の関数形を(6)式のような線型関数に固定しない場合，(5)式を変形すると次式が得られるので$r(\tau,a(X))$を最小にする$a(X)$として求められる。

$$r(\tau, a(X)) = \int_\Theta L(\theta, a(X))\,\xi(\theta|X)\,d\theta \qquad \text{---(7)}$$

上式において$\xi(\theta|X)$はベイズの定理より[3]求められるθの事後分布で，次式で与えられる。

$$\xi(\theta|X) = f(X|\theta)\tau(\theta)\Big/\int_\Theta f(X|\theta)\tau(\theta)\,d\theta \qquad \text{---(8)}$$

図-4,5は式(7)の計算結果である。図-4は強度が正規分布に従う場合で，図-5は対数正規分布に従う場合である。この図の詳細な意味は紙数の都合上，講演時に説明したい。

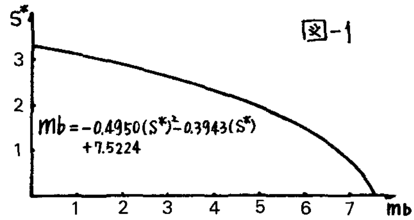

図-1

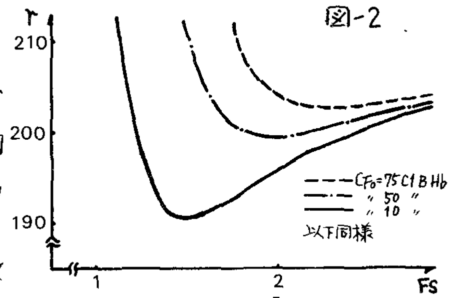

図-2

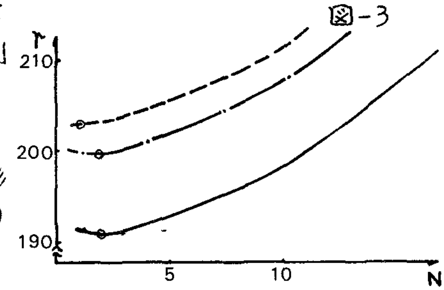

図-3

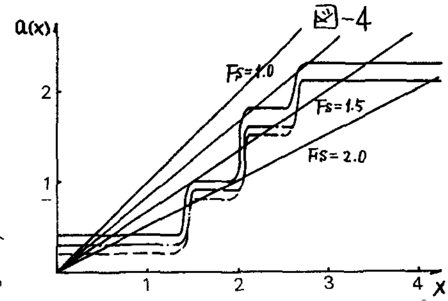

図-4

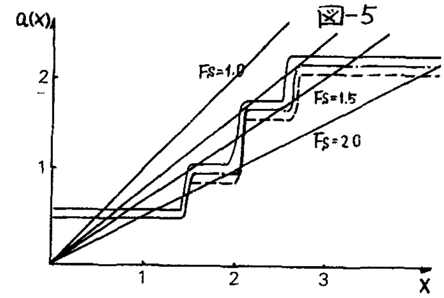

図-5

参考文献

1) 長尾・松尾・黒田(1972)；土木学会論文報告集，第203号 P.13~27
2) 松尾・浅岡(1974)；土木学会論文報告集，第225号，P.63~74
3) Furguson, T.S.(1967); Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach, Academic Press, New York & London.