多孔質弾性飽和土の動力学的応力解析

京都大学工学部　正員　大西有三
京都大学大学院　○学生員　柳田剛

1. はじめに

剛性多孔質固体中の液体の流れはすでに多くの研究がなされており、弾性多孔質固体中の流体の流れに対する研究はTerzaghi の圧密理論より始められた。圧密理論の有効応力の概念は流体の流出を通じて固体の変形状況を説明した。そして慣性力項を含めることにより飽和多孔質弾性体中の波動伝播問題に適用された。しかしその計算法は変換法を用いた数値解法では簡単な幾何学的なものに限られた。その後非圧縮性流体の飽和多孔質弾性土の流れに対して有限要素法を用いることが提案され、さらにGurtin タイプの変分原理と組み合わされて圧縮性流体に飽和された多孔質弾性土の動力学的応力解析にまで拡張された。本研究の目的は間げき水圧と粒子間応力とを動的荷重状態に有限要素法を用いて数値計算を行うことである。

2. 解析の原理

混合体理論あるいはBiot により与えられた飽和多孔質弾性体の運動方程式は、混合体と流体の運動方程式よりなり、流体のそれは透水係数Kのダルシーの法則の一般式である。

$$\tau_{ij} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$\pi_i + \rho_f b_i = \rho_f \ddot{u}_i + \frac{1}{f}\rho_f \ddot{w}_i + \frac{1}{k}\dot{w}_i \qquad \cdots\cdots (2)$$

記号上の点は時間に関する微分で u_i は固体の変位ベクトル成分。f は間げき率。単位面積に垂直な方向に通過する流体の変量が、fU_i で $w_i = f(U_i - u_i)$ 。応力テンソルは τ_{ij} , π は液圧。ρ, ρ_f は固，液体の比重。ひずみ－変位関係式は

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$\zeta = w_{i,i} \qquad \cdots\cdots (4)$$

その構成方程式は

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + \alpha M \delta_{ij}(\alpha \delta_{kl} e_{kl} + \zeta) \cdots (5)$$

$$\pi = M(\alpha \delta_{ij} e_{ij} + \zeta) \qquad \cdots (6)$$

C_{ijkl} は完全排水状態の弾性テンソル成分で，M と α は流体，混合体の圧縮率で定義される。運動方程式をラプラス変換し，さらに逆変換すると

$$t * \tau_{ij,j} + F_i - \rho u_i - \rho_f w_i = 0 \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$t * \pi_{,i} - 1 * \frac{1}{k} w_i + G_i - \rho_f u_i - \frac{1}{f}\rho_f w_i = 0 \qquad \cdots\cdots (8)$$

$$F_i = t * \rho b_i + \rho[t\dot{u}_i(0) + u_i(0)] + \rho_f[t\dot{w}_i(0) + w_i(0)]$$

$$G_i = t * \rho_f b_i + \rho_f[t\dot{u}_i(0) + u_i(0)] + \frac{1}{f}\rho_f[t\dot{w}_i(0) + w_i(0)] + \frac{1}{k} t\, w_i(0)$$

(3),(4),(5),(6) も同様に

$$t * e_{ij} = t * (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \cdots\cdots (9)$$

$$t * \zeta = t * w_{i,i} \qquad \cdots\cdots (10)$$

$$t*\tau_{i,j}=t*C_{ijkl}e_{kl}+t*\alpha M\delta_{ij}(\alpha\delta_{kl}e_{kl}+\zeta) \qquad \cdots\cdots (11)$$
$$t*\pi = t*M(\alpha\delta_{ij}e_{ij}+\zeta) \qquad \cdots\cdots (12)$$

この場合の汎関数は

$$\Omega_t(u)=\int_V [\rho u_i*u_i+2\rho_f u_i*w_i+\tfrac{1}{f}\rho_f w_i*w_i+1*\tfrac{1}{k}w_i*w_i+t*(C_{ijkl}+\alpha^2 M\delta_{ij}\delta_{kl})e_{kl}*e_{ij}$$
$$+2t*\alpha M\delta_{ij}\delta_{ij}*\zeta+t*M\zeta*\zeta-2F_i*u_i-2G_i*w_i]\,dV-\int_{S_1}t*\hat{T}_i*u_i\,dS$$
$$+\int_{S_2}t*(\hat{u}_i-u_i)*T_i\,dS-\int_{\varsigma_1}t*\hat{\pi}n_i*dS+\int_{\varsigma_2}t*(\hat{w}_i-w_i)*\pi n_i\,dS \quad \cdots (13)$$

F, G は物体力および表面力であり Wilson による方法を用いて減衰マトリックスを

$$\underline{D}=a_1(M_s-f^2M_f)+a_2(K+\alpha^2E)$$

とすれば次の形になる。

$$\begin{bmatrix}\underline{M}_s & \underline{M}_c\\ \underline{M}_c^T & \underline{M}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\underline{u}}\\ \ddot{\underline{w}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underline{D} & \underline{0}\\ \underline{0} & \underline{H}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\underline{u}}\\ \dot{\underline{w}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underline{K} & \underline{C}\\ \underline{C}^T & \underline{H}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underline{u}\\ \underline{w}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F\\ G\end{Bmatrix} \qquad \cdots (14)$$

Gurtin タイプの変分の有利な点は初期条件が汎関数 Ω の中に含まれ、また結果の中にも含まれているという点である。運動方程式の微分形(式(14))を用いての解析では、初期条件は一時消えるが式(14)を $\underline{M}\,\ddot{\underline{U}}+\underline{D}\,\dot{\underline{U}}+\underline{K}\,\underline{U}=\underline{P}$ とし時刻 $t_n+\theta\Delta t$ の $\tilde{\underline{U}}$ と $\dot{\tilde{\underline{U}}}$ は時刻 t_n の $\underline{U},\dot{\underline{U}},\ddot{\underline{U}}$ で展開できるとして初期条件は再導入される。

$$\tilde{\underline{U}}_{n+1}=U_n+\theta\Delta t\dot{\underline{U}}_n+(\tfrac{1}{2}-\beta)\theta^2\Delta t^2\ddot{\underline{U}}_n+\beta\theta^2\Delta t^2\ddot{\tilde{\underline{U}}}_{n+1}$$
$$\dot{\tilde{\underline{U}}}_{n+1}=\dot{\underline{U}}_n+(1-\gamma)\theta\Delta t\ddot{U}_n+\gamma\theta\Delta t\ddot{\tilde{\underline{U}}}_{n+1} \qquad \cdots\cdots (15)$$

したがって $t_n+\Delta t$ の変数は次の関係より得られる。

$$\ddot{U}_{n+1}=\frac{1}{\beta\theta^3\Delta t^2}(\tilde{U}_{n+1}-U_n)-\frac{1}{\beta\theta^2\Delta t}\dot{U}_n+(1-\frac{1}{2\beta\theta})\ddot{U}_n$$
$$\dot{\underline{U}}_{n+1}=\frac{\gamma}{\beta\theta^3\Delta t}(\tilde{U}_{n+1}-U_n)+(1-\frac{\gamma}{\theta\beta^2})\dot{U}_n+(1-\frac{\gamma}{2\beta\theta})\Delta t\,\ddot{U}_n$$
$$U_{n+1}=\frac{1}{\theta^3}\tilde{U}_{n+1}+(1-\frac{1}{\theta^3})U_n+(1-\frac{1}{\theta^2})\Delta t\dot{U}_n+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\theta})\Delta t^2\ddot{U}_n \quad \cdots (16)$$

式(15), (16) 中のパラメーター β, θ は多くの研究者により表-1のような値が提案されている。$\theta \neq 1$ のものは安定しているが、不自然な減衰を導入するので、ある量の増幅を導入することが提案された。$\gamma<\frac{1}{2}$ は増幅を導入し、$\gamma>\frac{1}{2}$ は減衰を導入する。Newmark の Constant Acceleration の方法は無条件に安定であり、表-1の上から3つの方法は Δt が小さいときに安定である。動的な問題を有限要素法で扱う場合、いまだ的確な要素の分割方法が得られておらず、波速、波長などの物理数や要素の大きさ、形状などの幾何学的条件が解析値に影響を与えていると思われ、要素の有効な分割方法の開発が待たれる。解析のモデルは、ショックチューブにステップ荷重を加えたものであり、その解析した結果は、当日発表する予定である。

Integral Form	β	θ
Explicit Second Central Difference	0	1.0
Fox - Godwin	1/12	1.0
Linear Acceleration	1/6	1.0
Newmark's Constant Acceleration	1/4	1.0
Wilson	1/6	2.0
Stiff Linear Acceleration	1/6	1.5

Table - 1

Reference

1. Biot, M. A., 1941, "General Theory of Three-dimensional Consolidation," J. Applied Physics, 12, 155-164.
2. Biot, M. A., 1956, "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range," J. Acoust. Soc. Am., 28, 2, 168-178.
3. Sandhu, R. S., and Pister, K. S., 1970, "A Variational Principle for Linear, Coupled Field Problems in Continum Mechanics," Int. J. Engrg. Sci., 8, 989-999.