

空間モービライズド面にもとづいた土の応力-ひずみ関係と降伏・破壊条件

京都大学防災研究所 正員 松岡 元

土の変形が、土粒子が最も滑動すると考えられるモービライズド面上のせん断・垂直応力比によって支配されるという考え方と、せん断時の土粒子の滑動の微視的な解析にもとづいて述べている^{1),2)}。これは、土が広い意味での摩擦則に従う材料であるという考えにつながるものである。ここでは、新たに提案している3次元応力空間における「空間モービライズド面 (Spatial Mobilized Plane; 略称 SMP)」なる応力面にもとづけば、相異なる3主応力下の応力-ひずみ特性から破壊条件までを統一的に規定できることを主張する。

まず、空間モービライズド面の定義を述べる。一般に相異なる3有効主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が作用する場合、Mohr の応力円は Fig. 1 のように3個描ける。そのそれぞれ3個の応力円に原点からの直線が接する点A, B, Cは、各2主応力軸間においてせん断・垂直応力比 (τ/σ_n) が最大の応力面ということになる。土粒子の滑動が摩擦則、すなわちせん断・垂直応力比によって支配されるものとすると、これらの応力面は意味のある面になる。この3個の応力面を3主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を3軸として表示すると、Fig. 2 の AC, AB, BC となるが、これらを3辺とする応力面 ABC に着目し、これを空間モービライズド面と名付けた。この SMP が3主応力軸と切る点の応力値は、

$$\tan\{45^\circ + (\phi_{m0ij}/2)\} = \sqrt{(1 + \sin\phi_{m0ij}) / (1 - \sin\phi_{m0ij})} = \sqrt{\sigma_i / \sigma_j} \quad (i, j = 1, 2, 3; i < j) \quad \text{--- (1)}$$
より、Fig. 2 に示すように各主応力値のルートの割合になる。したがって、等方応力状態では正八面体面に一致し、応力の変化とともに変化する性質をもっている。またその物理的意味は、土粒子が3次元応力空間において平均的にみて最も滑動する応力面と考えられる。なお、SMP の法線の方向余弦 (a_1, a_2, a_3) は次のように表わされる。 $a_i = \sqrt{J_3 / (\sigma_i J_2)}$ ($i=1, 2, 3$) --- (2) ことに、 J_1, J_2, J_3 は有効応力の1次, 2次, 3次の不変量である。 $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ --- (3)

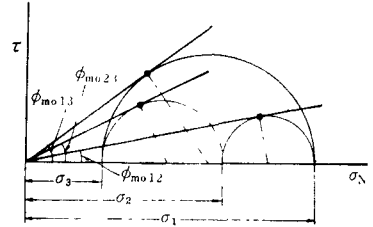


Fig. 1 Mohr の応力円と3個のモービライズド面。

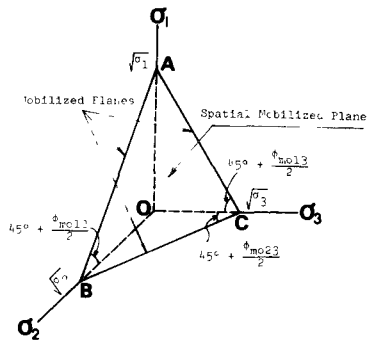


Fig. 2 空間モービライズド面と3個のモービライズド面。

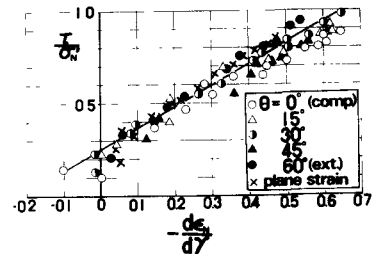


Fig. 3 豊浦砂のSMP上の%w ~ $d\sigma/d\sigma_1$ 関係。

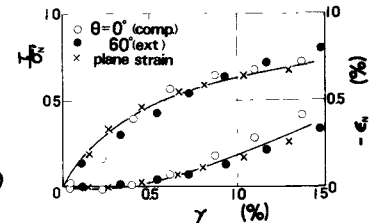


Fig. 4 豊浦砂のSMP上の%w ~ γ ~ ϵ_v 関係。

さて、(2)式を考慮すれば SMP 上の垂直応力 σ_N とセリ断
応力 τ は次のように表わされる。

$$\sigma_N = 3J_3/J_2 \text{ ---- (4), } \tau = \sqrt{J_1 J_2 J_3 - 9J_3^2/J_2} \text{ ---- (5)}$$

$$\therefore \tau/\sigma_N = \sqrt{(J_1 J_2 - 9J_3)/(9J_3)} \text{ ---- (6)}$$

また、主応力と主ひずみ増分の方向が一致すると仮定すれば、
SMP 上の 垂直ひずみ増分 $d\epsilon_N$ および セリ断ひずみ増分 $d\gamma$
は次式で与えられる。

$$d\epsilon_N = (J_3/J_2) \cdot \{ (d\epsilon_1/\sigma_1) + (d\epsilon_2/\sigma_2) + (d\epsilon_3/\sigma_3) \} \text{ ---- (7)}$$

$$d\gamma = 2(J_3/J_2) \cdot \sqrt{ \{ (d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2/\sigma_1\sigma_2 \} + \{ (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2/\sigma_2\sigma_3 \} + \{ (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2/\sigma_3\sigma_1 \} } \text{ ---- (8)}$$

こゝで、豊浦砂(密詰め)の多軸試験データに上式を用いて
SMP 上の $\tau/\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\gamma$ 関係および $\tau/\sigma_N \sim \gamma \sim \epsilon_N$ 関係で
整理した結果をそれぞれ Fig. 3, 4 に示す。 Fig. 3 にか
いて、 θ は正八面体面上の半径方向の応力径路の角度とあ
らわれ、 $\theta = 0^\circ$ は三軸圧縮、 $\theta = 60^\circ$ は三軸伸張試験を意味
し、その間の角度は多軸試験($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)を意味している。

なお、X印は平面ひずみ試験を表わしている。この図より、
種々の応力条件下の試験結果が大概ユークな直線上に整
理されるのがみられ、モビライズド面上の基本式¹⁾： $\tau/\sigma_N =$

$\lambda \cdot (-d\epsilon_N/d\gamma) + \mu$ ---- (9) はほぼ成立するようである。

また Fig. 4 より、密詰め砂という二ヒズ初期の粗み構造が
ほぼ同じであると考えられる場合には、三軸圧縮、伸張、
平面ひずみ試験の結果がおおむね同一のカーブの上にプロット
されるのがみられる。なお、Fig. 3, 4 と同様の整理と正八面体面上で行なうと、いづれ
も傾向をもち、変化し、ユークな関係にはなはいようである(当日、スライドに発表)。

次に、もし SMP 上の τ/σ_N がある一定値に達したとき、土が破壊するものとすると、
(6)式より、 $J_1 \cdot J_2/J_3 = \text{const.}$ ---- (10) なる破壊条件を得る。この破壊条件
を正八面体面上で表示すると、Fig. 5 が示すように破線が示された Mohr-Coulomb の破
壊条件を表わす六角形に外接する曲線状となり、実測値の傾向をよく説明できる。なお、
Fig. 6 に示すように SMP 上で Mohr-Coulomb の条件と本提案条件を表わせば、面は
いそこにそれぞれ正六角形と出はなる(当日、説明)。一方、周知のように Tresca と
von Mises の条件は 正八面体面表示でそれぞれ正六角形と出はなることがわかつた
ので、図中に示すような 4 破壊条件の対応関係が直感的にも理解される。

最後に、豊浦砂の多軸試験に協力と得た本学大学院生 北村良介氏に感謝しよう。

引用文献：1) Matsuoka (1974a) : A Microscopic Study on Shear Mechanism of Granular Materials,
Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, pp. 29-43. 2) Matsuoka (1974b) : Stress-Strain Relationships of Sands
Based on the Mobilized Plane, Vol. 14, No. 2, pp. 47-61. 3) Matsuoka and Nishii (1974) : Stress-Deformation
and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses, Proc. JSCE, No. 232, pp. 59-70.

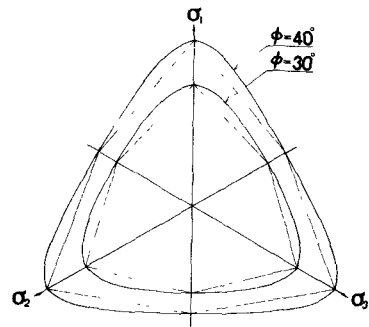
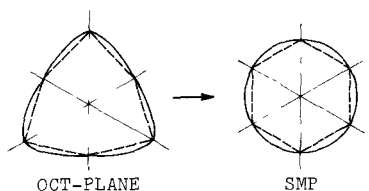


Fig. 5 新たに提案した破壊条件
(実線) と Mohr-Coulomb の
破壊条件 (破線)



Tresca ←→ Mohr-Coulomb
↓
von Mises ←→ "Author"

Fig. 6 SMP 上で表示した本提案条件
と Mohr-Coulomb 条件、および
4 破壊条件の対応関係。