

長期流出系に関する2・3の考察

京都大学工学部 正員 高樺琢馬
 京都大学工学部 正員 池淵周一
 名古屋市 正員 山田孝司

1. はじめに

長期流出に寄与する因子は多く、しかも、それらが複雑にからみあって流出過程を形成していると考えられる。したがって、流出機構の解明には決定論的アプローチのみならず、どうしても、確率論的アプローチが必要となってくる。本考察では、このように長期流出過程に必然的に内在する不確定性を、積極的に受け入れる立場に立って、Shannon の情報理論をモデルに適用することを考え、さらに、流出系に最大エントロピーが内包されていることを仮定することによって、状態間の遷移確率を算定することを試みた。なお、内容の一部については、第19回水理講演会で発表したことを断る。

2. マルコフ型情報源のエントロピーと、エントロピー最大仮説

① 離散的単純マルコフ型情報源のエントロピー： ある確率事象が生起することを、図1のShannon線図上で、1つの状態から他の状態へ遷移することと考え、その起こり方を状態から状態への遷移確率によって表現する。すなわち、1つの状態 E_i から、他の状態 E_j に、第 λ 番目の有向線を矢印の方向にたどる条件つき確率を $p_{ij}(\lambda)$ 、 E_i から E_j への有向線 λ に対応して情報源から生起する事象を $L_{ij}^{(\lambda)}$ 、および状態 E_i にある確率を P_i とすると、この情報源のエントロピーは、次式で表わされる。

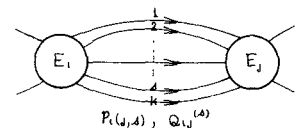


図1 Shannon線図
(状態遷移図)

$$H = - \sum_{i,j} P_i \cdot p_{ij}(\lambda) \cdot \log p_{ij}(\lambda) \quad (1)$$

② エントロピー最大仮説： 以上に述べたエントロピーの概念を、具体的に水文現象に適用すると次のように考えることができる。つまり、長期流出の解析は多数のサイクルを対象とするので、一般に不確定性が大きく、よってエントロピーは一般に大きい。流出サイクル数がさらに増加すると、不確定性も増大し、次第にエントロピーは最大値に近づき、定常的性格を持つようになる。このことは、長期流出においては、状態の遷移を多くの系列について調べれば、その遷移確率は正確にある定まった値に近づくことを意味し、つまり大数の法則の成立を意味するものであるから、状態の遷移については平衡系を想定しているということであり、このときエントロピーは極限値をとる。したがって、長期流出系の状態遷移には、エントロピー最大の仮説が成立するものと考えられる。

3. 長期流出系の情報理論的モデルと遷移確率の算定式

長期流出系の確率的内部構造を次のように考える。すなわち、流出系が有限個の内部構造を持ち、その出力に現われる流量は、変換系の内部状態と入力である降雨により、確率的に定まるとする。いま、流出系の内部状態を、計量可能なものとして流量の m 重系列で定義するものとする。その状態に降雨 λ が作用すると、内部状態は他の内部状態に遷移すると同時に、状態間の到達時間 $t_{ij}^{(\lambda)}$ をもつて、流量 $Q_{ij}^{(\lambda)}$ を生起する、という状態遷移を想定することができる。すると、前出の離散的マルコフ型情報源のエントロピーの定

義式を用いて、単位時間当リエントロピー: H' は、次式と与えられる。

$$H' = - \frac{\sum_{i,j} P_i p_{ij}(s) \log p_{ij}(s)}{\sum_{i,j} P_i p_{ij}(s) l_{ij}^{(s)}} \quad (2)$$

つぎに、遷移確率 $p_{ij}(s)$ を求めるために、最大エントロピー仮説を適用することを考える。つまり、以下の規格化条件のもとに、(2) 式を最大化することを考えればよい。

$$\begin{cases} \sum_i P_i = 1 & (3) \\ \sum_{i,j} P_i p_{ij}(s) = P(s) & (4) \\ \sum_{i,j} P_i p_{ij}(s) = P_j & (5) \end{cases}$$

ここに、 $P(s)$ は、降雨 s の生起確率とする。

Lagrange の未定係数法を用いて求めると、降雨確率 $P(s)$ は、状態 i になかわらず一定であると仮定し、 $p_{ij}(s)$ は以下の式で表わされる。

$$p_{ij}(s) = \frac{P(s) \exp[-l_{ij}^{(s)} C]}{\sum_j \exp[-l_{ij}^{(s)} C]} \quad (6)$$

ここに、 C は、(2) 式の最大値で、次式を満足する。

$$\sum_s P(s) \log \frac{P(s)}{\sum_j \exp[-l_{ij}^{(s)} C]} = 0 \quad (7)$$

また、 $P(s)$ が各状態で一定値をとらないとすると、状態 E_i のとき s なる降雨の生起確率 $P_i(s)$ を用いて、近似的に、

$$p_{ij}(s) = \frac{P_i(s) \exp[-l_{ij}^{(s)} C]}{\sum_j \exp[-l_{ij}^{(s)} C]} \quad (8)$$

と与えられる。 C は、次式を満たす。

$$\sum_s P_i(s) \log \frac{P_i(s)}{\sum_j \exp[-l_{ij}^{(s)} C]} = 0 \quad (9)$$

4. 由良川流域荒倉地点への適用と、結果の検討

右表は、荒倉地点の 28~48 年の間の各種資料から得られた実測値(下段)と、(9)式を用いて得られた理論値(上段)を示したものである。表から明らかなように、実測値と理論値は全状態にわたりよく適合しており、最大エントロピー仮説の妥当性、(9)式で示された理論式の適合性が明らかであると思われる。なお、ここには示さなかったが、(7)式を用いた理論値の試算では、大流出量状態に、大降雨が作用した場合の遷移確率がうまく説明されなかったが、これは、 $P(s)$ が状態になかわらず一定であるという仮定が妥当でないためと考えられる。また、状態の定義としての流量の m 重系列で、本考察では、 $l_{ij}^{(s)}$ の評価との兼ね合いから、 $m=1$ としたが、今後は、状態の定義を明確にしていくとともに、他流域への適用を行なう。本考察の適応性を確かめていきたい。

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P_1	0.71649 0.7467	0.0170 0.0170	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
P_2	0.0170 0.0170	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
P_3	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
P_4	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
P_5	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
P_6	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_1	0.71649 0.7467	0.0170 0.0170	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_2	0.0170 0.0170	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_3	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_4	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_5	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		
E_6	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012	0.0012 0.0012		

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P_1	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
P_2	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
P_3	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
P_4	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
P_5	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
P_6	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_1	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_2	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_3	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_4	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_5	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000
E_6	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000